Ejemplo Circulo Osculador Parametrice la circunferencia osculatriz $y = x^2$ en $x = \dfrac{1}{2}$ si se sabe que la curvatura en dicho punto es $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Solución En este caso usamos la parametrización $r(t) = (t, t^2)$ y sabemos que el radio de el circulo de curvatura es $R = \dfrac{1}{\kappa} = \sqrt{2}$.
Por otro lado

$$r'(t) = (1, 2t) \;\Rightarrow\; N(t) = \frac{(-2t, 1)}{\sqrt{1+4t^2}} \;\Rightarrow\; N\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) \;\Rightarrow\; c(t_0) = r\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow\; c(t_0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) + \sqrt{2}(\cos(t), \operatorname{sen}(t))$$

Teorema 1. *Si $r(t)$ es una función vectorial diferenciable en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$ entonces para cada valot t en el que $T(t)$ y $r''(t)$ existen, la curvatura se puede expresar*

$$a)\quad \kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{r'(t)}$$
$$b)\quad \kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}$$

Demostración. Tenemos que

$$\kappa(t) = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \left\| \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\| = \left\| \frac{T'(t)}{r'(t)} \right\|$$

ahora para b) tenemos

$$\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = T(t) \;\Rightarrow\; r'(t) = T(t)\|r'(t)\| \;\Rightarrow\; r''(t) = \|r'(t)\|'T(t) + \|r'(t)\|T'(t)$$

también

$$\left.\begin{cases} \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = N(t) \;\Rightarrow\; T'(t) = N(t)\|T'(t)\| \\ \kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{r'(t)} \;\Rightarrow\; \|T'(t)\| = \kappa(t)\|r'(t)\| \end{cases}\right\} \;\Rightarrow\; r''(t) = \|r'(t)\|T(t) + \|r'(t)\|N(t)\kappa(t)\|r'(t)\|$$

por lo tanto

$$r''(t) = \|r'(t)\|T(t) + \|r'(t)\|^2 N(t)\kappa(t)$$

y haciendo el producto vectorial

$$r'(t) \times r''(t) = T(t)\|r'(t)\| \times (\|r'(t)\|T(t) + \|r'(t)\|N(t)\kappa(t)\|r'(t)\|) =$$

$$\cancel{\|r'(t)\|\|r'(t)\|'T(t) \times T(t)} + \kappa(t)\|r'(t)\|^3 T(t) \times N(t) = \kappa(t)\|r'(t)\|^3 T(t) \times N(t)$$

obtenemos

$$r'(t) \times r''(t) = \kappa(t)\|r'(t)\|^3 T(t) \times N(t) \;\Rightarrow\; \|r'(t) \times r''(t)\| = \|\kappa(t)\|r'(t)\|^3 T(t) \times N(t)\|$$

donde

$$\|\kappa(t)\|r'(t)\|^3 T(t) \times N(t)\| = |\kappa(t)|\|r'(t)\|^3 \|T(t) \times N(t)\| = |\kappa(t)|\|r'(t)\|^3 \|T(t)\|\|N(t)\| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = |\kappa(t)|\|r'(t)\|^3$$

por lo tanto

$$\|r'(t) \times r''(t)\| = |\kappa(t)|\|r'(t)\|^3 \;\Rightarrow\; |\kappa(t)| = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}$$

$\square$

Ejemplo Encuentre $\kappa(t)$ para la hélice circular $r(t) = (a\cos(t), a\operatorname{sen}(t), ct)$ con $a > 0$

Solución En este caso tenemos

$$\begin{aligned} r'(t) &= [-a\operatorname{sen}(t), a\cos(t), c] \\ r''(t) &= [-a\cos(t), -a\operatorname{sen}(t), 0] \end{aligned}$$

aplicando el producto vectorial

$$r'(t) \times r''(t) = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ -a\operatorname{sen}(t) & a\cos(t) & c \\ -a\cos(t) & -a\operatorname{sen}(t) & 0 \end{vmatrix} = [ac\operatorname{sen}(t), -ac\cos(t), a^2]$$

sacando la norma

$$\|r'(t) \times r''(t)\| = \sqrt{(ac\operatorname{sen}(t))^2 + (-ac\cos(t))^2 + (a^2)^2} = \sqrt{a^2c^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + c^2}$$

por lo tanto

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{(\sqrt{a^2+c^2})^3} = \frac{a}{a^2+c^2}$$

En resumen si tenemos una curva $r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \;\; o \;\; \mathbb{R}^3$, tenemos que
Si esta reparametrizada por longitud de arco

$$\begin{aligned} T(s) &= r'(s) \\ N(s) &= \tfrac{r''(s)}{\|r''(s)\|} \\ \kappa(s) &= \|r''(s)\| \end{aligned}$$

Si no esta reparametrizada por longitud de arco

$$\begin{aligned} T(t) &= \tfrac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \\ N(t) &= \tfrac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \\ |\kappa(t)| &= \tfrac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} \end{aligned}$$

Vector Binormal

Un tercer vector definido mediante $B = T \times N$ recibe el nombre de *Vector binomial*. Los tres vectores T, N y B forman un conjunto de vectores mutuamente ortogonales de orientación derecha llamado ***Triedo de Frenet***.
Tenemos que

$$\|B\| = \|T \times N\| = \|T\|\|N\| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

es un vector unitario.
Dado que $B \perp T$, $B \perp N$ El plano generado por T y N se denomina plano osculador. El plano generado por N y B se llama plano normal, mientras que el plano generado por T y B se llama plano rectificador.
Ahora bien si la curva esta parametrizada por longitud de arco

$$B(s) = T(s) \times N(s) = r'(s) \times \frac{r''(s)}{\|r''(s)\|} = \frac{1}{\|r''(s)\|}(r'(s) \times r''(s))$$

Si la curva no esta parametrizada por longitud de arco

$$B(t) = T(t) \times N(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \times \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} \times \frac{r''(t)}{\|r''(t)\|} = \frac{r'(t) \times r''(t)}{\|r'(t)\|\|r''(t)\|} = \frac{r'(t) \times r''(t)}{\|r'(t)\|\|r''(t)\| \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} =$$

$$\frac{r'(t) \times r''(t)}{\|r'(t) \times r''(t)\|}$$