Guia para la reposicion del primer examen parcial

Cálculo Diferencial e Integral III

1.- Sea $\langle , \rangle$ un producto escalar en un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Demostrar que se cumplen:

$$(i) \quad La \quad identidad \quad de \quad Polarización \quad \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

$$(i) \quad La \quad ley \quad del \quad Paralelogramo \quad (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = 2(\|x\|^2 + \|x\|^2)$$

2.-Probar que La funcion de $\langle , \rangle$ con valores

$$(i) \quad \langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 \quad x, y \in \mathbb{R}^2$$

Define un producto interior

3.- Sea $d(f,g) = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$ ¿Es d una metrica?

4.-Sean $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

5.-Sean $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_i \cdot x_j = 0$ si $i, j \in \{1, ..., n\},\ i \neq j$. Pruebe que

$$\|x_1 + ... + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + ... + \|x_n\|^2$$

6.-Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que

$$(a) \quad x \cdot y = 0 \iff \|x+y\| = \|x-y\|$$

$$(b) \quad x \cdot y > 0 \iff \|x+y\| > \|x-y\|$$

$$(b) \quad x \cdot y < 0 \iff \|x+y\| < \|x-y\|$$

7.-Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ diferentes de 0. Pruebe que

$$(a) \quad Si \quad \|x\| = \|y\| = \|x-y\|$$

entonces el angulo entre x,y es $\dfrac{\pi}{3}$

$$(b) \quad Si \quad \|x\| = \|x-y\| = \|x-y\|$$

entonces el angulo entre x,y es igual al angulo entre y, y-x

8.-Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que

$$(a) \quad \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists\ \lambda > 0 \in \mathbb{R}\ tal\ que\ x = \lambda y$$

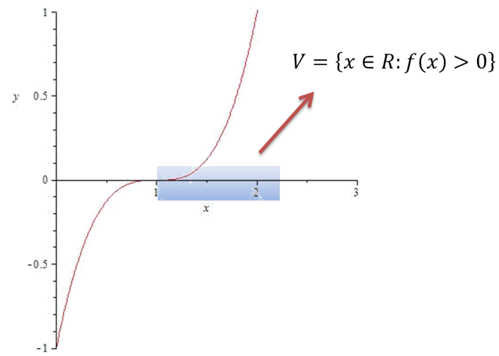
$$(b) \quad \|x-y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists\ \lambda < 0 \in \mathbb{R}\ tal\ que\ x = \lambda y$$

9.-Sea $C[a,b]$ el conjunto de las funciones reales continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$. Sean $f,g \,\epsilon\, C[a,b]$ definimos

$$d(f,g) = \max_{x \,\epsilon\, [a,b]} \{|f(x) - g(x)|\}$$

demostrar que d es una metrica.

10.-Sea $V = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$. Demuestre que V es un conjunto abierto



11.-Sea $r > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Si $A = B(x,r)$ pruebe que:

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| > r\} \subset \ ext(A)$$

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| = r\} \subset \ Fr(A)$$

12.-Pruebe que, si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado entonces

$$int(Fr(A)) = \emptyset$$

13.-Sean $A, B \subset \ \mathbb{R}^2$. Si

$$A \times \ B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, \ y \in B\}$$

pruebe que si A, B son conjuntos cerrados entonces $A \times B$ es cerrado

14.-Sean A,B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Diga si las siguientes afirmaciones son ciertas. Pruebe sus respuestas

$$(A \bigcup B)' = A' \bigcup B'$$

$$(A \bigcap B)' = A' \bigcap B'$$

15.-Si

$$A = ([0,1] \times [0,1]) \bigcap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q} \ y \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\}$$

quien es $int(A)$, $Fr(A)$, $ext(A)$, A' y $\overline{A}$

16.-Sean A,B subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Diga si las siguientes afirmaciones son ciertas. Pruebe sus respuestas

$$Si \ A \subset \ B \quad entonces \quad \overline{A} \subset \overline{B}$$

$$\overline{(A \bigcup B)} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$$

$$\overline{(A \bigcap B)} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$$

17.-Sea $r > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Si $A = B(x, r)$ pruebe que:

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| > r\} \subset \; ext(A)$$

18.-Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ tales que $a_i < b_i$ para $i = 1, 2, 3$. Pruebe que el conjunto

$$A = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$$

es un conjunto acotado