**Guia para la reposicion del segundo examen parcial**

**Cálculo Diferencial e Integral III**

1.-Demostrar que si $f(t)$ es derivable en $t_0$, entonces $f(t)$ es continua en $t_0$.

2.-Demuestre que si $\varphi$ es diferenciable soble un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y $f$ es diferenciable sobre un intervalo que contiene a

$\varphi(I) = \{\varphi(t) | t \epsilon I\}$, entonces $f \circ \varphi$ es diferenciable en $I$ y $(f \circ \varphi)' = f' \circ \varphi \cdot \varphi'$ sobre $I$

3.-Demuestre que la derivada de un vector de magnitud constante es ortogonal a el.

4.-Hallar el angulo formado por las graficas de las funciones definidas por $f(t) = (t, t^2 + 1, 1 - 2t)$, $g(w) = (w + 1/2, -2 + 8w, -2)$ en algunos de los puntos de interseccion.

5.-Sea $R \subset \mathbb{R}^3$ la recta determinada por la interseccion de los planos

$$ax + by + cz = 0, \quad \overline{a}x + \overline{b}y + \overline{c}z = 0$$

Muestre que si $\overline{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $\overline{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ son dos puntos diferentes que pertenecen a R, entonces la funcion

$$f(t) = \overline{x}_0 + t(\overline{x}_1 - \overline{x}_0)$$

es una parametrizacion de R.

6.-Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ derivable y $r(t) = \|f(t)\|$. Si $r(t_0) \neq 0$ y $r(t_0)$ es un maximo o un minimo local de r, pruebe que

$$f(t) \cdot f'(t) = 0$$

7.-Sea $\gamma = (f, g) : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo $(a, b)$ tal que $\gamma'(t) \neq 0 \ \ \forall\ t \in (a, b)$. Pruebe que existe $\xi \in (a, b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \lambda \gamma'(\xi)$$

8.-Demuestre que Si $f$ y $\|f\|$ son integrables en $[a, b]$ entonces

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt$$

9.-Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ si existen $\overline{x},\ \overline{u} \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\gamma(t) = \overline{x} + t\overline{u}, \quad \forall\ t \in [a, b]$$

pruebe que $\|\gamma'(t)\|$ es constante

10.-Si $r(t)$ es un vector de posicion de una particula que se mueve a lo largo de una curva suave en el espacio, entonces:

(a) la velocidad es la derivada de la posicion $v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$

(b) la rapidez es la magnitud de la velocidad $\|v(t)\|$

(c) la aceleracion es la derivada de la velocidad $a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt}$

(d) el vector $\dfrac{v(t)}{\|v(t)\|}$ es una direccion de movimiento en el tiempo t.

El vector $r(t) = 3\cos t\hat{i} + 3\sin t\hat{j} + t^2\hat{k}$ da la posicion de un cuerpo en movimiento en el tiempo t. Encuentre la rapidez del cuerpo y su direccion cuando $t = 2$ ¿En que tiempo son ortogonales los vectores velocidad y aceleracion del cuerpo?

11.-Sobre una circunferencia fija de radio rueda (sin resbalar y sobre la parte exterior) otra circunferencia de radio b. Encuentre una funcion de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ que describa el movimiento de un punto que se encuentre en la circunferencia exterior

12.-Muestre que la curva descrita por la funcion vectorial

$$f(t) = (\operatorname{sen}(2t), 2\operatorname{sen}^2(t), 2\cos(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

pertenece a una esfera con centro en el origen.

13.-Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si $f$ tiene derivada continua, entonces muestre que

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \int_a^b \|f'(t)\|dt$$

14.-Pruebe que la funcion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Dada por

$$f(t) = \left(t, t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right)\right), \quad t \in [0, 1]$$

y $f(0) = (0, 0)$ es rectificable

15.-Pruebe que la funcion $f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Dada por

$$f(t) = \left(t, \sqrt{t}\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)\right), \quad t \in [0, 1]$$

y $f(0) = (0, 0)$ no es rectificable

16.-Considere las funciones

$$f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$g(s) = \left(\frac{1 - s^2}{1 + s^2}, \frac{2s}{1 + s^2}\right), \quad s \in [0, 1]$$

Pruebe que f es una reparametrizacion de g.

17.-Reparametrice la helice

$$r(t) = \cos t\hat{i} + \sin t\hat{j} + t\hat{k}$$

con respecto a la longitud de arco.

18.-Sea $f:[0,3]\to\mathbb{R}^2$ Dada por $f(t)=(t,\cosh(t))$. Obtenga la reparametrizacion por longitud de arco

19.-Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ una curva y $\overline{f}:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ su reparametrizacion, pruebe que

$$\int_a^b \|f'(t)\|dt = \int_c^d \|\overline{f}'(s)\|ds$$

20.-Suponga que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ esta parametrizada $f(t)=(x(t),y(t))$ pruebe que

$$\kappa(t)=\frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{((x'(t))^2+(y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

21.-Suponga que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ esta parametrizada $f(t)=(t,\varphi(t))$ pruebe que

$$\kappa(t)=\frac{\varphi''(t)}{(1+(\varphi'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

22.-Se llama evoluta de una curva $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ a la curva que describen los centros de curvatura de f, determine

(a) la evoluta de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$f(t)=(t,t^2)$$

(b) la evoluta de $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por

$$f(t)=(t,t^3)$$

23.-Sea $\overline{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ la reparametrizacion por longitud de arco de f, donde $\overline{f}=f\circ\varphi$. Demuestre que la torsion $\tau$ esta dada por

$$\tau(s)=\frac{\overline{f}'(s)\times\overline{f}'''(s)\cdot\overline{f}'(s)}{(\kappa(s))^2}$$

24.-Pruebe lo siguiente: Sea $\overline{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ la reparametrizacion por longitud de arco de f. Si para cada $s\in\mathbb{R}$ se tiene que $N'(s)$ existe entonces

$$N'(s)=-\kappa(s)T(s)+\tau(s)B(s)$$

25.-Pruebe lo siguiente: Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ tal que $T(t)$ existe para todo $t\in\mathbb{R}$. Si $T'(t)\neq 0$ entonces

$$f''(t)=f'(t)T(t)+(f(t))^2\kappa(t)N(t)$$

donde $\kappa(t)$ es la curvatura en en el punto $f(t)$.

(b) Investigue la interpretacion fisica de la formula anterior.