Guia para la reposicion del tercer examen parcial

Cálculo Diferencial e Integral III

1.-Describir los conjuntos de nivel $f(x_1,...,x_n)=k$, para lo valores indicados de k

(a)$f(x,y)=x^2+y^2$, $k=0,1,2,3$

(b)$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $k=0,1,2,3$

(c)$f(x,y)=x^2-y^2$, $k=-2,-1,0,1,2,3$

2.–Decribir los conjuntos de nivel $f(x_1,...,x_n)=k$, para lo valores idicados de k

$$(a)\quad f(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2, \qquad k\geq 0$$

3.-Bosquejar la superficie de nivel

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=1\}$$

de la funcion

$$f(x,y,z)=z+\sqrt{x^2+y^2}$$

4.-Probar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}=1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(xy)}{x}=0$$

5.-Sean

$$c_{12}=\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b}f(x,y)\right)$$

$$c_{21}=\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a}f(x,y)\right)$$

$$c=\lim_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$$

Dar un ejemplo

(a) $c=c_{12}=c_{21}$

(b) $c\nexists,\ c_{12}\neq c_{21}$

(c) $c=c_{12},\ c_{21}\nexists$

(d) $c\ \exists$, pero c_{12} y $c_{21}\nexists$

(e) $c\nexists$ y $c_{21}=c_{12}$

6.-Se considera la funcion $z=f(x,y)$. Supongamos que existen $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$, $\lim_{x\to x_0}f(x,y)$ y $\lim_{y\to y_0}f(x,y)$ Probar que existe

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0}f(x,y)\right)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

y entonces

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L$$

7.- Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

pruebe que f no es de clase c^1, no es diferenciable pero si es continua

8.-Pruebe usando la definicion que las funciones son diferenciables en el punto dado

$$(a)\quad f(x,y)=3x^2+9y^2,\quad p=(1,2)$$

$$(b)\quad f(x,y)=4x^2y^3,\quad p=(1,1)$$

9.-Calcule las derivadas parciales de cada una de las funciones siguientes, donde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$(a)\ f(x,y)=\int_x^{xy} g(t)dt$$
$$(b)\ f(x,y)=\int_{x-y}^{x+y} g(t)\ dt$$

10.-Pruebe lo siguiente: Sean $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $\overline{x}_0\in A$ y $\overline{u}\in\mathbb{R}^2$ tal que $\|\overline{u}\|=1$ y $(a,b)\subset\mathbb{R}$ tal que $f(A)\subset(a,b)$. Si $g:(a,b)\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es derivable en $f(\overline{x}_0)$ y $D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0)$ existe entonces existe

$$D_{\overline{u}}(g\circ f)(\overline{x}_0)$$

y ademas

$$D_{\overline{u}}(g\circ f)(\overline{x}_0)=g'(f(\overline{x}_0))D_{\overline{u}}f(\overline{x}_0)$$

11.- Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Argumente si la función cumple con el Teorema de Shwarz

12.-Demuestre lo siguiente: Si la función $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida en A de $\mathbb{R}^2$, es diferenciable en el ´punto $p=(x_0,y_0)\in A$, entonces es continua en ese punto

13.-Demuestre lo siguiente: Suponga que $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\leq M \quad y \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|\leq M$$

donde M no depende de x,y entonces f es continua en A.

14.-Demuestre lo siguiente: Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es una función diferenciable en x_0 en la dirección del vector unitario u entonces

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\ f}{\partial x_i} \cdot u_i$$

15.-Demuestre lo siguiente: Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario u entonces

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot u$$

16.-Demuestre lo siguiente: Supongamos que $\nabla(f(x)) \neq (0, 0, 0)$. Entonces $\nabla(f(x))$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f crece más rápido.