Guia para la reposicion del cuarto examen parcial

Cálculo Diferencial e Integral III

1.-Halle el volumen maximo de una caja inscrita en un tetraedro limitado por los planos coordenados y el plano

$$x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=1$$

2.-Halle el punto del plano

$$z=x+y+1$$

mas cercano al punto $(1,0,0)$

3.-Pruebe que las sumas de los cuadrados de las distancias entre un punto $P=(c,d)$ y n puntos fijos

$$(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)$$

es minima cuando c es la media de las coordenadas x de las a_i y d es la media de las coordenadas y de las b_i

4.-(Regresion Lineal en tres variables) Supongamos que se tienen n datos en tres variables x,y,z a saber $(x_1,y_i,z_i),\ i=1,...,n,$ de las cuales se sabe que deben guardar una relacion lineal del tipo

$$z=Ax+By+C$$

Se quieren determinar entonces los coeficientes A,B y C que hacen que los valores de z calculados como

$$z=Ax+By+C$$

ajusten lo mejor posible los datos proporcionados. Desde el punto de vista geometrico se trata de hallar el plano

$$z=Ax+By+C$$

que mejor ajuste los n puntos dados. Hallar los valores de A,B,C que hagan que

$$S=\sum_{i=1}^{n}(z_i-(Ax_i+By_i+C))^2$$

sea minima.

5.-obtenga el mejor ajuste lineal del tipo $z=Ax+By+C$ para el siguiente conjunto de datos

a.

x	0	0.8	1	3
y	0.1	−0.5	−1	−2
z	1.1	1.3	1	2

b.

x	1.8	4.2	−0.3	2	3
y	0.5	2.1	3.2	−0.4	1
z	2	1.8	−2.7	3.5	2.5

6.-(Ajuste cuadratico) Supongamos un conjunto de datos de las variables $x,y,$ a saber $(x_i,y_i)\ i=1,...,n$ las cuales se sabe guardan una relacion cuadratica del tipo

$$y=ax^2+bx+c$$

Se trata de determinar los coeficientes a, b, c que mejor ajustan tal relacion cuadratica

7.-Obtenga la parabola que mejor ajusta cada uno de los siguientes conjuntos

a.

x	1	−1	2	3
y	3.9	6	9.1	18

b.

x	0	1	−1	2	−2
y	−1.1	6.1	−11.95	8.95	−27

8.-Sea $B > 0$. Pruebe que el maximo de

$$f(x_1, ..., x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$$

sujeta a las restricciones

$$x_1 + \cdots + x_n = B, \quad y \quad x_i \geq 0 \;\; i = 1, ..., n$$

se da en $x_1 = \cdots = x_n = \frac{B}{n}$.

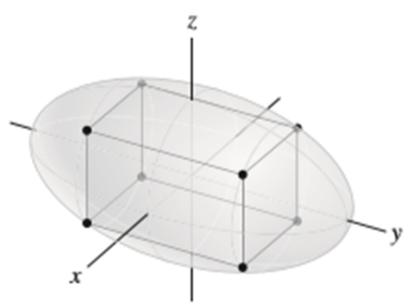
9.-Use el ejercicio anterior para deducir que

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

para cualesquiera numeros positivos $a_1, ..., a_n$

10.-Halle las dimensiones de la caja de maximo volumen con sus lados paralelos a los planos coordenados, que se pueda inscribir en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



11.-Demuestre lo siguiente: Si $u \in \mathbb{R}$ es abierto, la función $f : u \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $x_0 \in u$ es un extremo local entonces $\nabla f(x_0) = 0$, esto es x_0 es un punto crítico de f.

12.- Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Suponga que la gráfica de g pasa por el origen. Demuestre que la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = z^2 + \int_{-x}^{y} g(t)\; dt$$

tiene un punto crítico en $(0,0,0)$. Determine la naturaleza de este punto crítico suponiendo que $g'(0) \neq 0$

13.- Dados n números $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ diferentes de cero, pruebe que el valor mínimo de la función

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + \cdots + x_n^2\sigma_n^2$$

sujeta a $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ es c, donde

$$c = \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{-2}\right)^{-1}$$