Guia para la reposicion del quinto examen parcial

Cálculo Diferencial e Integral III

1.-Mostrar que

$$xy + z + 3xz^5 = 4$$

es soluble para z como funcion de (x, y) cerca de $(1, 0, 1)$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ en $(1, 0)$

2.-Mostrar que

$$x^3z^2 - z^3yx = 0$$

es soluble para z como funcion de (x, y) cerca de $(1, 1, 1)$, pero no cerca del origen. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ en $(1, 1)$

3.-Analizar la solubilidad del sistema

$$3x + 2y + z^2 + u + v^2 = 0$$
$$4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 = 0$$
$$x + z + w + u^2 + 2 = 0$$

para u, v, w en terminos de x,y,z cerca de $x = y = z = 0, \quad u = v = 0$ y $w = -2$

4.- El sistema

$$u - v = x + y, \quad u + v = x - y$$

define funciones implicitas $u = u(x, y),\ v = v(x, y),\ x = x(u, v),\ y = y(u, v)$, las cuales se pueden hacer explicitas. Obtenga las derivadas parciales de estas funciones y compruebe que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$$

5.-Considere las expresiones

$$uv - 3x + 2y = 0, \quad u^4 - v^4 = x^2 - y^2$$

Habiendo verificado que estas definen funciones $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$ en los alrededores del punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$, determine las ecuaciones de los planos tangentes a las superficies $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$ en p.

6.-Considere las expresiones

$$x + y = e^u - e^v, \quad x^2 + y^2 = u + y$$

Demuestre que estas expresiones determinan funciones implicitas $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$ en los alrededores del punto $p = (0, 0, 0, 0)$. Halle las derivadas parciales de segundo orden cruzadas de estas funciones en el origen

7.-Sean $f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f_1(1) = f_2(1) = g_1(1) = g_2(1) = 1$.

Considere las expresiones

$$\int_u^{v^2} f_1(t)\ dt = \int_x^y g_1(t)\ dt, \quad \int_{u^3}^{v^4} f_2(t)\ dt = \int_{x^2}^{y^2} g_2(t)\ dt$$

Demuestre que estas expresiones determinan funciones implicitas $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$ en los alrededores del punto $p = (1, 1, 1, 1)$. Halle las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1,1), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1,1), \quad \frac{\partial v}{\partial y}(1,1)$$

8.-Demuestre que las expresiones

$$3x = u + v + w, \quad x^2 + y^2 = u^2 + v^2, \quad x^3 + y^3 + z^3 = 3u^3$$

definen funciones implicitas $u = u(x, y, z),\ v = v(x, y, z),\ w = w(x, y, z)$ alrededor del punto $p = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Determine las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}$$

Demuestre tambien que tales expresiones definen funciones implicitas $x = x(u, v, w),\ y = y(u, v, w),\ z = z(u, v, w)$ alrededor del punto p. Calcule las derivadas parciales

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \ \frac{\partial y}{\partial v}, \ \frac{\partial z}{\partial w}$$

9.- Encuentre una funcion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen coincida con una esfera de radio a centrada en el origen

10.- Encuentre una funcion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen coincida con un cono

Definición 1. *Por sucesiones*

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in A'$. Decimos que f tiene limite en x_0 y que su limite es $\ell \in \mathbb{R}^m$, si para toda sucesion $\{x_k\}$ contenida en $A - \{x_0\}$ que converge a x_0 se tiene que la sucesion $\{f(x_k)\}$ converge a ℓ. En este caso escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

y decimos que ℓ es el limite de f en x_0.

Definición 2. *$(\epsilon - \delta)$*

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y sea x_0 un punto de acumulacion de A. Se dice que $\ell \in \mathbb{R}^m$ es el limite de f en x_0, y se denota por:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Si dado $\forall\ \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(x) - \ell\| < \epsilon \ \ \textit{cuando} \ \ 0 < \|x - x_0\| < \delta$$

11.-Pruebe lo siguiente: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y f una funcion $f : A \to \mathbb{R}^m$ x_0 un punto de acumulacion de A. Escribimos f en terminos de sus componentes $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Entonces, la existencia del limite

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x})$$

es equivalente a la existencia de los limites

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f_i(\overline{x})$$

para $i = 1, \ldots, m$. En este caso se tiene ademas que

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = \left(\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f_1(\overline{x}), \ldots, \lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f_m(\overline{x}) \right)$$

12.-Pruebe lo siguiente:

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ y x_0 un punto de acumulacion. Entonces la condicion $\lim\limits_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = \overline{l}$, es equivalente a $\lim\limits_{k \to \infty} f(\overline{x}_k) = l$ para toda sucesion $(\overline{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ de elementos de A, con puntos diferentes de $\overline{x}_0$, tienda a $\overline{x}_0$.

13.-Pruebe lo siguiente:

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funcion continua. Si $k \subset \Omega$ es compacto, entonces $f(k)$ es compacto.

14.-Pruebe lo siguiente:

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funcion continua. Si $k \subset \Omega$ es conexo entonces $f(k)$ es tambien conexo.

15.-Demuestre que las siguientes funciones son diferenciables en todos los puntos de su dominio

$$(a) \quad f(x, y, z) = (x + y + z, yz - x^2, x + z)$$

$$(a) \quad f(x, y, z) = (x^2 + z, xy, z^2 - y)$$

16.-Si $f(x, y) = (x \cos\ y, x \operatorname{sen}\ y)$ y $g(r, s, t) = (r, t - s)$, determinar la derivada

$$f \circ g \quad en \quad el \quad punto \quad \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$