MARTES 09-AGOSTO-2016

EL ESPACIO $\mathbb{R}^n$

* ESPACIOS VECTORIALES.

DEFINICION

UN ESPACIO VECTORIAL (O ESPACIO LINEAL) V SOBRE UN CAMPO F CONSISTE DE UN CONJUNTO EN EL QUE ESTAN DEFINIDAS DOS OPERACIONES (ADICION Y MULTIPLICACIÓN ESCALAR)

SUMA VECTORIAL

- PARA CUALESQUIERA $x, y \in V$
  $\bar{x}+\bar{y} \in V$ (cerradura)

MULTIPLICACION ESCALAR

- PARA CUALESQUIERA $\bar{x} \in V$ Y $\lambda \in F$
  $\lambda \bar{x} \in V$ (cerradura)

QUE SATISFACEN LAS SIGUIENTES PROPIEDADES

1. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in V \quad \bar{x}+\bar{y} = \bar{y}+\bar{x}$ CONMUTATIVIDAD
2. $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in V \quad (\bar{x}+\bar{y})+\bar{z} = \bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})$ ASOCIATIVIDAD
3. $\exists\, \bar{0} \in V$ TAL QUE $\bar{x}+\bar{0} = \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in V$ (NEUTRO ADITIVO)
4. PARA CADA $\bar{x} \in V$, $\exists\, \bar{y} \in V$ TAL QUE $\bar{x}+\bar{y}=0$ (INVERSO ADITIVO)
5. $\forall x \in V \quad 1x = x \quad 1 \in F$
6. PARA $a, b \in F$ Y CADA $\bar{x} \in V$
   $(a+b)\bar{x} = a\bar{x}+b\bar{x}$
7. PARA $a \in F$ Y $\bar{x}, \bar{y} \in V$
   $a(\bar{x}+\bar{y}) = a\bar{x}+a\bar{y}$
8. PARA $a, b \in F$ Y $\bar{x} \in V$
   $(ab)\bar{x} = a(b\bar{x})$

* EL ESPACIO EUCLIDEANO $\mathbb{R}^n$.

DEFINICION.

COMO CONJUNTO, $\mathbb{R}^n$ ES LA COLECCIÓN DE TODAS LAS n-ADAS ORDENADAS DE NUMEROS REALES. ES DECIR

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i=1,\dots,n\}$$

PROPOSICIÓN.

DEMUESTRE QUE EL ESPACIO EUCLIDEANO $\mathbb{R}^n$ ES UN ESPACIO VECTORIAL.

SI $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_n)$.

NOTEMOS QUE LA SUMA

$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ PARA $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ SE DEFINE.

$$\bar{x}+\bar{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) \in \mathbb{R}^n$$

$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ PARA $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ Y $\lambda \in \mathbb{R}$ SE DEFINE

$$\lambda \bar{x} = \lambda (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n$$

CUMPLE LA CERRADURA PARA LA SUMA VECTORIAL Y EL PRODUCTO ESCALAR RESPECTIVAMENTE

AHORA ANALICEMOS LAS PROPIEDADES.

1: $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \quad \bar{x}+\bar{y} = \bar{y}+\bar{x}$

$\bar{x}+\bar{y} = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$

COMO CADA ENTRADA ES UN NUMERO REAL

$x_i + y_i = y_i + x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$\bar{x}+\bar{y} = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n) = (y_1+x_1, \dots, y_n+x_n) = \bar{y}+\bar{x}$$ cumple ✓

3: $\exists\, \bar{0} \in \mathbb{R}^n$ TAL QUE $\bar{x}+\bar{0} = \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

NOTEMOS QUE $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ ESTA DEFINIDO

$$\bar{0} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n\text{-VECES}})$$

ASI QUE $\bar{x}+\bar{0} = (x_1, \dots, x_n) + (0, \dots, 0)$

$$= (x_1+0, \dots, x_n+0) = (x_1, \dots, x_n) = \bar{x}$$

cumple ✓