Lema. (Desigualdad de Young)

Sean $p, q \in (1,\infty)$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Entonces para cualquier par de numeros reales $a, b \geq 0$ se cumple que

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Demostración

Si $a=0$ ó $b=0$ ✓ (cumple la desigualdad)

Así que supongamos $ab>0$

* Observemos que la funcion exponencial es una funcion convexa, es decir para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in [0,1]$ se cumple

$$(1-t)e^x + te^y \geq e^{[(1-t)x+ty]}$$

Si $t=\frac{1}{q} \Rightarrow 1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$

Así que $e^x = a^p$ y $e^y = b^q$

$e^x = e^{p\log a} \Rightarrow x = p\log a \quad x = \log a^p$

Así de igual manera $y = \log b^q$

Así $\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geq e^{\left(\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q\right)}$

$= e^{(\log(a^p))^{1/p} + (\ln b^q)^{1/q}}$

$= e^{(\ln a + \ln b)} = e^{\log(ab)} = ab$

Por lo tanto $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$

Si $ab<0$ utilizamos la concavidad de la funcion logaritmo y se cumple la desigualdad.

Proposición:

Desigualdad de Hölder en $\mathbb{R}^n$

Sean $p, q \in (1,\infty)$ tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Entonces, para cualesquiera $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ se cumple que.

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q}$$

es decir $\|\bar{x}\cdot\bar{y}\|_1 \leq \|\bar{x}\|_p \|\bar{y}\|_q$

donde $\bar{x}\cdot\bar{y} := (x_1y_1,\dots,x_ny_n)$

Demostración

Si $\bar{x}=0$ o $\bar{y}=0$ ✓ (cumple)

Supongamos $\bar{x}\neq\bar{0}$ y $\bar{y}\neq\bar{0}$

Si $a_k = \frac{|x_k|}{\|\bar{x}\|_p}$ y $b_k := \frac{|y_k|}{\|y\|_q}$

(Hacemos que sea un vector unitario)

y aplicamos desigualdad de Young.

Así que

$$\frac{|x_k||y_k|}{\|\bar{x}\|_p\|\bar{y}\|_q} \leq \frac{|x_k|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|y_k|^q}{q\|y\|_q^q}$$

Sumamos todas las desigualdades para $k=\{1,\dots,n\}$ y obtenemos

$$\frac{1}{\|\bar{x}\|_p\|\bar{y}\|_q}\sum_{k=1}^{n}|x_k||y_k| \leq \frac{\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p}{p\|\bar{x}\|_p^p} + \frac{\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)}{q\|y\|_q^q}$$

$$= \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Por lo tanto

$$\sum_k \|xy\|_1 \leq \|\bar{x}\|_p\|\bar{x}\|_q$$