JUEVES 11-AGOSTO-2016

ESPACIOS NORMADOS

DEFINICION

SEA V UN ESPACIO VECTORIAL SOBRE $\mathbb{R}$.
UNA NORMA EN V ES UNA FUNCION $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ QUE TIENE LAS SIGUIENTES PROPIEDADES

* $\|v\| = 0$ SI Y SOLO SI $v = 0$
* $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ PARA CUALESQUIERA $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$
* $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ PARA CUALESQUIERA $v, w \in V$

EJEMPLOS DE NORMAS.

DADO $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ DEFINIMOS

* $\|\bar{x}\|_1 := |x_1| + \ldots + |x_n|$
* $\|\bar{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$
* $\|\bar{x}\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$ SI $p \in [1, \infty)$

DENOTEMOS POR $C^0[a,b]$ AL CONJUNTO DE TODAS LAS FUNCIONES CONTINUAS EN $[a,b]$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

LA SUMA DE FUNCIONES Y PRODUCTO DE UNA FUNCIÓN POR UN ESCALAR, DEFINIDOS COMO

$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$.

$(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$

DONDE $f, g \in C^0[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$

LE DAN A $C^0[a,b]$ LA ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL.

DADA $f \in C^0[a,b]$ DEFINIMOS

$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ SI $p \in [1, \infty)$

$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$

SON NORMAS EN $C^0[a,b]$

VAMOS A DEMOSTRAR QUE $\|\bar{x}\|_p$ EN EFECTO ES UNA NORMA

* P.D. $\|\bar{x}\|_p = 0$ SI Y SOLO SI $\bar{x} = \bar{0}$

$\Rightarrow]$ SI $\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} = 0$

ENTONCES $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = 0$

DADO QUE $|x_k|^p$ ES UN NUMERO POSITIVO PARA CUALQUIER $k \in \{1, \ldots, n\}$
ENTONCES $|x_k|^p = 0$ PARA CADA $k \in \{1, \ldots, n\}$
ASI QUE $|x_k| = 0$ POR LO QUE $x_k = 0$ PARA CADA $k \in \{1, \ldots, n\}$ POR LO QUE

$\bar{x} = \bar{0}$

$\Leftarrow]$ SI $\bar{x} = \bar{0}$

ENTONCES $x_k = 0$ PARA CADA $k \in \{1, \ldots, n\}$

Y $\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{n} |0|^p \right)^{1/p}$

$= 0$

* P.D $\|\lambda \bar{x}\|_p = |\lambda| \, \|\bar{x}\|_p$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

TENEMOS

$$\|\lambda \bar{x}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda|^p |x_k|^p \right)^{1/p}$$

$$= \left(|\lambda|^p \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

$$= |\lambda| \, \|\bar{x}\|_p.$$

* P.D. $\|\bar{x} + \bar{y}\|_p \leq \|\bar{x}\|_p + \|\bar{y}\|_p$

ANTES DE DEMOSTRAR ESTO NECESITAREMOS UNAS DESIGUALDADES.