Espacios Metricos

* Sea (E, d) un espacio metrico y $x, y, z, w \in E$ entonces

$$|d(x,z) - d(y,w)| \leq d(x,y) + d(z,w)$$

Demostración

Tenemos por un lado

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Por ser d una metrica)

Aplicando de nuevo la desigualdad del triangulo a $d(y,z)$

$d(y,z) \leq d(y,w) + d(w,z)$ así que

$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,w) + d(w,z)$

entonces

$d(x,z) - d(y,w) \leq d(x,y) + d(w,z)$

Sabemos $d(w,z) = d(z,w)$ (d es metrica)

$d(x,z) - d(y,w) \leq d(x,w) + d(z,w)$

Por otro lado analogamente)

$d(y,w) \leq d(y,x) + d(x,z) + d(w,z)$

Así que

$d(y,w) - d(x,z) \leq d(y,\cancel{z}) + d(z,w)$

entonces

$-(d(x,z) - d(y,w)) \leq d(y,x) + d(z,w)$

Por lo tanto

$|d(x,z) - d(y,w)| \leq d(x,y) + d(z,w)$

* Sea (E, d) un espacio metrico y sea

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

Demuestre que δ es una metrica de E.

Demostración

1.- $\Rightarrow]$ $\delta(x,y) = 0$ si y solo si $x = y$.

Tenemos

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} = 0$$

Así que $d(x,y) = 0$

Como $d(x,y)$ es una metrica

$x = y$

$\Leftarrow]$ Si $x = y$

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} = \frac{0}{1+0} = 0$$

ya que $d(x,y) = 0$ por ser metrica

2.- P.D $\delta(x,y) = \delta(y,x)$

Como

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1 + d(y,x)} = \delta(y,x)$$

ya que $d(x,y)$ es metrica

3.- P.D.

$\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$

Primero analicemos como es la funcion.

$f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

Notemos que es una funcion creciente

Ademas $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1+x} = 1$ así que

$f(x) < 1$

SE TIENE PARA TODO $x, y \in E$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

SABEMOS QUE $\delta(x,y)$ ES CRECIENTE

$$\frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \leq \frac{d(x,z)+d(z,y)+d(x,z)d(z,y)+d(x,y)\,d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)+d(x,z)d(z,y)}$$

$$= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = \delta(x,z) + \delta(z,y)$$

POR LO TANTO

$$\delta(x,y) = \delta(x,z) + \delta(z,y)$$

POR LO TANTO $\delta(x,y)$ ES UNA METRICA.

BOLA ABIERTA

1) LA BOLA ABIERTA CON CENTRO EN X_0 Y RADIO $r>0$, ES EL CONJUNTO

$$B(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r\}$$

BOLA CERRADA.

2) LA BOLA CERRADA CON CENTRO $\bar{x}_0$ Y RADIO $r \geq 0$ ES EL CONJUNTO

$$B(\bar{x}_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq r\}$$

CONJUNTO ABIERTO

DEFINICION:

UN CONJUNTO $V \subset \mathbb{R}^n$ SE DICE QUE ES ABIERTO SI PARA CADA $\bar{x} \in V$ EXISTE UNA BOLA ABIERTA $B(\bar{x}, r)$ CONTENIDA EN V. ES DECIR SI PARA CADA $\bar{x} \in V$ EXISTE $r>0$ TAL QUE $B(\bar{x}, r) \subset V$

CONJUNTO CERRADO

DEFINICION

UN CONJUNTO $F \subset \mathbb{R}^n$ SE DICE QUE ES CERRADO SI SU COMPLEMENTO $F^c = \mathbb{R}^n - F$ ES UN CONJUNTO ABIERTO.

PROPOSICIÓN

TODA BOLA ABIERTA EN $\mathbb{R}^n$ ES UN CONJUNTO ABIERTO.

Demostración

SEA $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ Y $r>0$

POR DEMOSTRAR QUE $B(\bar{x}_0, r)$ ES UN CONJUNTO ABIERTO.

IDEA:

DEBEMOS PROBAR QUE PARA $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, r)$, EXISTE UNA BOLA ABIERTA $B(\bar{x}, r)$ CONTENIDA A SU VEZ EN LA BOLA ABIERTA $B(\bar{x}_0, r)$.

SEA $\bar{x} \in B(x_0, r)$ Y CONSIDEREMOS

$$R = r - \|\bar{x} - \bar{x}_0\|$$

COMO $\bar{x} \in B(x_0, r)$ SE TIENE QUE

$\|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r$ ASI QUE $R>0$

MOSTRAREMOS QUE LA BOLA ABIERTA

$$B(\bar{x}, R) \subset B(\bar{x}_0, r)$$

SEA $y \in B(\bar{x}, R)$ TENEMOS

$\|\bar{y} - \bar{x}\| < R$ ENTONCES.

$$\|\bar{y} - \bar{x}_0\| = \|\bar{y} - \bar{x} + \bar{x} - x_0\|$$

$$\leq \|\bar{y} - \bar{x}\| + \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < R + \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r$$

ASI QUE $\bar{y} \in B(\bar{x}_0, r)$

$\therefore\ B(x, R) \subset B(\bar{x}_0, r)$