Teorema de la Función Implícita (sistemas de ecuaciones)

Teorema 1. *Considere las funciones* $z_1 = F(x, y, u, v)$ *y* $z_2 = G(x, y, u, v)$. *Sea* $P = (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$ *un punto tal que* $F(P) = G(P) = 0$. *Suponga que en una bola* $B \in \mathbb{R}^4$ *de centro* P *las funciones* F *y* G *tienen (sus cuatro) derivadas parciales continuas. Si el Jacobiano* $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P) \neq 0$ *entonces las expresiones* $F(x, y, u, v) = 0$ *y* $G(x, y, u, v) = 0$ *definen funciones (implícitas)* $u = \varphi_1(x, y)$ *y* $v = \varphi_2(x, y)$ *definidas en una vecindad* v *de* (x, y) *las cuales tienen derivadas parciales continuas en* v

Dadas las funciones F y G de las variables u, v, x, y nos preguntamos cuando de las expresiones

$F(x, y, u, v) = 0$
$G(x, y, u, v) = 0$

podemos despejar a u y v en términos de x y y en caso de ser posible diremos que las funciones $u = \varphi_1(x, y)$ y $v = \varphi_2(x, y)$ son funciones implícitas dadas. Se espera que $\exists'$n funciones $u = \varphi_1(x, y)$ y $v = \varphi_2(x, y)$ en

$F(x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$
$G(x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$

con (x, y) en alguna vecindad V.

Suponiendo que existen φ_1 y φ_2 veamos sus derivadas

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x}$$

Lo anterior se puede ver como un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Aquí se ve que para que el sistema tenga solución

$$det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ en } (P) \text{ (el } det \text{ Jacobiano) y según la regla de Cramer}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\det\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & -\dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & -\dfrac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}}{det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

Analogamente si derivamos con respecto a y obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial G}{\partial y}$$

de donde

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\det\begin{vmatrix} -\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}}{det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & -\dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & -\dfrac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}}{det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

Al determinante $det\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$ lo llamamos Jacobiano y lo denotamos por $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.

Ejemplo Analizar la solubilidad del sistema

$$e^u+e^v=x+ye$$

$$ue^u+ve^v=xye$$

Solución En este caso definimos

$$F(x,y,u,v)=e^u+e^v-x-ye=0$$

$$G(x,y,u,v) = ue^u + ve^v - xye = 0$$

por lo que el sistema tendra solución si $\det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$

En este caso

$$\det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} e^u & e^v \\ ue^u + e^{e^u} & ve^v + e^v \end{vmatrix} = e^u\left(ve^v + e^v\right) - e^v\left(ue^u + e^u\right) = ve^{u+v} - ue^{v+u} \neq 0$$

por lo tanto u y v se pueden ver en términos de x,y $\therefore$ se pueden calcular sus parciales en $u = 0,\ v = 1,\ x = 1,\ y = 1$ que es este caso dan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\det \begin{vmatrix} -1 & -ye \\ e^v & ve^v + e^v \end{vmatrix}}{ve^{u+v} - ue^{v+u}} = -\frac{-(ve^v + e^v) + e^v ye}{ve^{u+v} - ue^{v+u}}\ |_{(0,1,1,1)} = \frac{2e - e^2}{e} = 2 - e$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\det \begin{vmatrix} e^u & ue^u + e^u \\ -1 & -ye \end{vmatrix}}{ve^{u+v} - ue^{v+u}} = -\frac{-ye^u e + ue^u + e^u}{ve^{u+v} - ue^{v+u}}\ |_{(0,1,1,1)} = \frac{e-1}{e} = 1 - e^{-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\det \begin{vmatrix} -e & -xe \\ e^v & ve^v + e^v \end{vmatrix}}{ve^{u+v} - ue^{v+u}} = -\frac{-e(ve^v + e^v) + e^v xe}{ve^{u+v} - ue^{v+u}}\ |_{(0,1,1,1)} = \frac{e^2 + e^2 - e^2}{e} = e$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\det \begin{vmatrix} e^u & ue^u + e^u \\ -e & -xe \end{vmatrix}}{ve^{u+v} - ue^{v+u}} = -\frac{-e^u xe + e(ue^u + e^u)}{ve^{u+v} - ue^{v+u}}\ |_{(0,1,1,1)} = \frac{e-e}{e} = 0$$

Teorema de la Función Implícita (n-sistemas de ecuaciones)

Teorema 2. *Considere las n-funciones*

$$u_i = F_i(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n), \quad i = 1, ..., n$$

Sea $P = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_m, \overline{y}_1, ..., \overline{y}_n) \in \mathbb{R}^{n+m}$ un punto tal que $F_i(P) = 0$. Suponga que en una bola $B \in \mathbb{R}^{n+m}$ de centro P las funciones F_i tienen (sus $m+n$) derivadas parciales continuas. Si el Jacobiano

$$\frac{\partial(F_1, F_2, ..., F_n)}{\partial(y_1, y_2, ..., y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0 \quad en \quad P$$

entonces las expresiones $F_i(x_1,...,x_m,y_1,...,y_n)=0$ *y* $G(x,y,u,v)=0$ *definen funciones (implícitas)* $y_i=\varphi_i(x_1,...,x_m),\ i=1,...,n$ *definidas en una vecindad* v *de* $(\overline{x}_1,...,\overline{x}_m)$ *las cuales tienen derivadas parciales continuas en* v *que se pueden calcular como*

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j}=\frac{\frac{\partial(F_1,F_2,\dots,F_n)}{\partial(y_1,\dots,y_{i-1},x_j,y_{i+1},\dots,y_n)}}{\frac{\partial(F_1,F_2,\dots,F_n)}{\partial(y_1,y_2,\dots,y_n)}}$$

Ejemplo Considere las ecuaciones

$$\begin{aligned}F(x,y,u,v,w)&=x+y+u+v+w=0\\G(x,y,u,v,w)&=x^2-y^2+u^2-2v^2+w^2+1=0\\H(x,y,u,v,w)&=x^3+y^3+u^4-3v^4+8w^4+2=0\end{aligned}$$

En el punto $P=(1,-1,1,-1,0)$, se tiene $F(P)=G(P)=H(P)=0$. Todas las derivadas parciales de F, G, H son continuas. Se tiene además que

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}=\det\begin{vmatrix}1&1&1\\2u&-4v&2w\\4u^3&-12v^3&32w^2\end{vmatrix}_{\substack{u=1\\v=-1\\w=0}}=8\neq 0$$

Entonces el teorema asegura que en torno a P podemos despejar u,v,w en términos de x,y y establecer funciones

$$u=u(x,y),\ v=v(x,y),\ w=w(x,y)$$

las cuales tienen derivadas parciales continuas en una vecindad de $(1,-1)$ que se pueden calcular

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(y,v,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,x,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,x)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}}$$