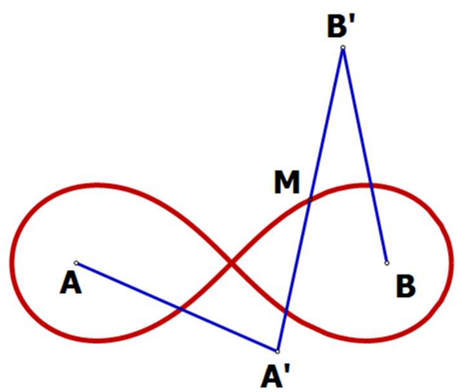
Mecanismos Articulados

Mecanismo Articulado.-Es un aparato mecánico que consiste en barras rígidas metálicas que se pueden unir con ejes en sus extremos o a lo largo de la barra, que les permiten girar libremente.

La Lemniscata de Bernoulli

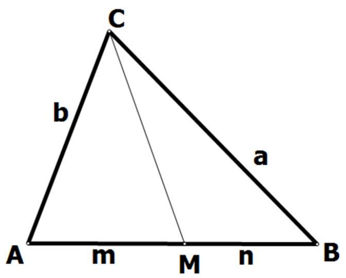
Un ejemplo de una curva que se puede trazar con un mecanismo tres-barras es la **Lemniscata de Bernoulli**



Vamos a demostrar que este mecanismo articulado de tres-barras dibuja en efecto una Lemniscata.

Definición 1. *Los puntos sobre la lemniscata satisfacen: El producto de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante*

Necesitaremos otra herramienta conocida como El Teorema de Apolonio ó Teorema de Stewart, que dice que en cualquier triángulo $\triangle ABC$ se cumple la siguiente relación



$m \cdot a^2 + n \cdot b^2 = c \cdot CM^2 + m \cdot n^2 + n \cdot m^2$

Demostración. Sea
$\alpha = \angle AMC$ y $180 - \alpha = \angle CMB$ Usando ley de cosenos en los triángulos $\triangle$ CAM, $\triangle$ CBM
$b^2 = m^2 + CM^2 - 2mCM \cos\alpha$
$a^2 = n^2 + CM^2 - 2nCM \cos 180 - \alpha$

Como $\cos 180 - \alpha = -\cos\alpha$ entonces

$$\cos\alpha = \frac{m^2 + CM^2 - b^2}{2mCM}$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - n^2 - CM^2}{2nCM}$$

por tanto al igualar se tiene

$$nm^2 + nCM^2 - nb^2 = ma^2 - mn^2 - mCM^2$$

por lo que

$$nCM^2 + mCM^2 + mn^2 + mn^2 = ma^2 + nb^2$$

Como $m + n = c$ entonces

$$cCM^2 + mn^2 + mn^2 = ma^2 + nb^2$$

$\square$

Según el teorema de Apolonio se tiene que en el triángulo $\triangle AA'B'$

$$e \cdot j^2 + f \cdot a^2 = A'B' \cdot r^2 + e \cdot f^2 + f \cdot e^2$$

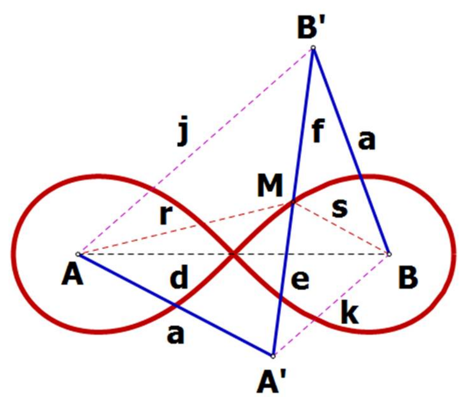
$$\frac{d}{2} \cdot j^2 + \frac{d}{2} \cdot a^2 = d \cdot r^2 + \frac{d}{2} \cdot \frac{d^2}{4} + \frac{d}{2} \cdot \frac{d^2}{4}$$

$$\frac{d}{2}\left(j^2 + a^2\right) = \frac{d}{2}\left(2 \cdot r^2 + \frac{d^2}{2}\right)$$

$$j^2 + a^2 = 2 \cdot r^2 + \frac{d^2}{2}$$

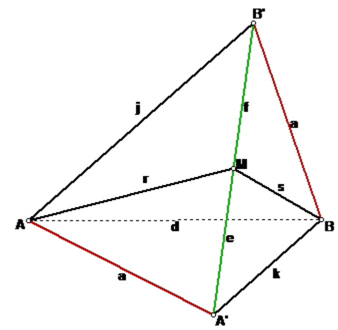
como $d = a\sqrt{2}$, $A'B' = d$

$$j^2 = 2 \cdot r^2 \Rightarrow j = \sqrt{2} \cdot r$$



Analogamente se demuestra que

$$k = \sqrt{2} \cdot s$$



Comprobaremos que el trapezoide $\triangle AA'BB'$ es isoceles Tenemos que los triángulos
$\triangle$ AA'B y $\triangle$ A'B'B son semejantes y por lo tanto los ángulos $\angle$ A'AB=$\angle$ $A'B'B$
También los triángulos $\triangle$ AA'B' y $\triangle$ ABB' son congruentes por tanto los ángulos
$\angle$ AA'B'=$\angle$ ABB'
$\angle$ AB'B=$\angle$ B'AA'
$\angle$ A'B'A=$\angle$ B'AB
por lo tanto los angulos
$\angle$ BB'A=$\angle$ A'AB'
por lo que el trapezoide $AA'BB'$ es isoceles

Sabemos que un trapezoide isoceles es ciclico.
Según Ptolomeo en un cuadrilatero ciclico.
La suma de los productos de lados opuestos es igual al producto de las diagonales

$$\therefore \quad j \cdot K + a \cdot a = d \cdot (e + f)$$

$$j \cdot K + a^2 = d^2$$

$$\sqrt{2} \cdot r \cdot \sqrt{2} \cdot s + a^2 = 2 \cdot a^2$$

$$r \cdot s = \frac{a^2}{2}$$

$\therefore$ $r \cdot s$ es constante, así la curva descrita por M es el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a dos puntos fijos es constante (Lemniscata)