Producto interior (escalar)

Sea $\mathcal{E}$ un espacio vectorial, un producto interno (escalar) en $\mathcal{E}$ es una función de $\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ en $\mathbb{R}$ que a cada par de vectores x, y le asocia un número que satisface las siguientes propiedades: (se denota $\langle x, y\rangle$)

i) $\langle x, x\rangle > 0$ si $x \neq 0$
ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
iii) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \quad \lambda \in \mathbb{R}$
iv) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

Para los siguientes problemas decir si son o no productos internos en los espacios dados.

a) $\langle (a,b), (c,d)\rangle = ac - bd$ en $\mathbb{R}^2$

No es producto interno en $\mathbb{R}^2$ pues no cumple (i)

Por ejemplo, tomemos $(1,0), (0,1) \in \mathbb{R}^2$, así tenemos

$\langle (1,0), (0,1)\rangle = 1\cdot 0 - 0\cdot 1 = 0$. y $(1,0), (0,1) \neq (0,0)$

b) $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f'(x) g(x)\, dx$ sobre $P(\mathbb{R})$

No es producto interno en $P(\mathbb{R})$ pues no cumple (ii)

Sean $f(x), g(x) \in P(\mathbb{R})$

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f'(x) g(x)\, dx \neq \int_0^1 g'(x) f(x)\, dx = \langle g(x), f(x)\rangle$$

Espacio Normado $\mathbb{R}^n$

En general, una norma en un espacio vectorial $\mathcal{E}$ es una aplicación $x \to \|x\|$ de $\mathcal{E}$ en $[0, +\infty)$ que satisface las siguientes propiedades:

i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Para cualesquiera par de vectores $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ se satisface que:

$$\big|\,\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\|\,\big| \leq \|\bar{x} + \bar{y}\|$$

Notemos que $\big|\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\|\big| \le \|\bar{x}+\bar{y}\| \Rightarrow$

$\underbrace{-\|\bar{x}+\bar{y}\| \le \|\bar{x}\|-\|\bar{y}\|}_{①} \le \|\bar{x}+\bar{y}\|$. Buscaremos
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad ②$

llegar a las desigualdades 1 y 2 para demostrar lo que queremos

① $\|\bar{y}\| = \|\bar{y}+\bar{x}-\bar{x}\| \underset{\text{Desigualdad del triángulo}}{\le} \|\bar{y}+\bar{x}\| + \|-\bar{x}\| \underset{\|-\bar{x}\|=\|\bar{x}\|}{=} \|\bar{y}+\bar{x}\| + \|\bar{x}\|$

$\Rightarrow$

$\|\bar{y}\| - \|\bar{x}\| \le \|\bar{y}+\bar{x}\|$ multiplicando por -1 tenemos

$\boxed{\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\| \ge \|\bar{x}+\bar{y}\|}$ (I)

② $\|\bar{x}\| = \|\bar{x}+\bar{y}-\bar{y}\| \le \|\bar{x}+\bar{y}\| + \|-\bar{y}\| = \|\bar{x}+\bar{y}\| + \|\bar{y}\|$

$\Rightarrow \boxed{\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\| \le \|\bar{x}+\bar{y}\|}$ (II)

$\therefore$ por (I) y (II) tenemos

$$\big|\|\bar{x}\|-\|\bar{y}\|\big| \le \|\bar{x}+\bar{y}\|$$

Espacios métricos

Def.
Una métrica (o distancia) en X es una función $d: X \times X \to \mathbb{R}$ que cumple:

i) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$
ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$
iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in X$

Def. Un espacio métrico es un conjunto X provista de una métrica d. Lo denotamos (X,d)

Ejercicios:

1. Probar que $\| \ \|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\|\bar{x}\| = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$ es producto escalar.

2. Probar que $X = a_n$ (conjunto de sucesiones de números reales), tal que a_n converge ($a_n < \infty$), ~~siendo con~~ ~~con métrica~~ $d(x_n, y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|$ probar que es una métrica.

Con $x_n, y_n \in X$