1. Sea (X,d) un espacio métrico. Sean $A,B \subseteq X$, entonces:

i) Dado A conjunto abierto y B cerrado, demuestre que $A \setminus B$ es abierto.

ii) Dado A conjunto cerrado y B abierto, demuestre que $A \setminus B$ es cerrado.

Tarea para el Lunes

i) Dem.

Primero veamos a que es igual $A \setminus B$:

$A \setminus B = A - B = A \cap B^c$. Como por hipotesis B es cerrado, sabemos que B^c es abierto.

Así tenemos que A y B^c son cerrados y ya mostramos que la intersección finita de abiertos es abierta así tenemos que $A \cap B^c = A \setminus B$ es abierta ∎

2. Sea (X,d) un espacio métrico. Considere $S \subseteq X$. Demuestre que $S \subseteq \overline{S}$.

Dem.

Sea $x \in S$ y $r > 0$, sabemos que $x \in B(x,r) \Rightarrow B(x,r) \cap S \neq \emptyset$ (para cualquier $r > 0$) así por definición de cerradura $x \in \overline{S}$ $\forall x \in S$

$\therefore S \subseteq \overline{S}$ ∎

3. Sea (X,d) un espacio métrico. Considere $S_1, S_2 \subseteq X$. Si $S_1 \subsetneq S_2$ entonces se cumple que $\overline{S_1} \subsetneq \overline{S_2}$.

Demostración

Sea $x \in \overline{S_1}$ P.D $x \in \overline{S_2}$

Como $x \in \overline{S_1}$ sabemos por definición de cerradura que para todo $r > 0$ $B(\bar{x}, r) \cap S_1 \neq \emptyset$. (I)

Como $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow B(\bar{x}, r) \cap S_1 \subset B(\bar{x}, r) \cap S_2$

$\Rightarrow$ por (I) que $B(\bar{x}, r) \cap S_2 \neq \emptyset$ para cualquier $r > 0$

$\therefore x \in \overline{S_2}$

$\therefore \overline{S_1} \subset \overline{S_2}$

4. Sea (X,d) un espacio métrico. Considere $S \subseteq X$, demuestre que $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$

Dem.

$\subseteq)$

Sea $x \in \overline{\overline{S}} \Rightarrow$ por def. de cerradura para todo $r > 0$ $B(x, r) \cap \overline{S} \neq \emptyset$. Así tomemos $y \in B(x,r) \cap \overline{S}$ $\Rightarrow \exists r' > 0 \ni B(y, r') \subset B(x, r)$ [pues toda bola abierta es un conjunto abierto]

Como $y \in \overline{S} \Rightarrow B(y, r') \cap S \neq \emptyset \Rightarrow$ $B(x, r) \cap S \neq \emptyset \Rightarrow$ por def. de cerradura $x \in \overline{S}$.

2)

Sea $x \in \overline{\overline{S}} \Rightarrow$ por def. $B(x,r) \cap \overline{S} \neq \emptyset$ como $S \subset \overline{S}$ (por 2) tenemos que $B(x,r) \cap S \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ por def. de cerradura $x \in \overline{S}$.

$\therefore \overline{\overline{S}} = \overline{S}$ ∎

- 5. Sea (X,d) un espacio métrico. Consideremos $A, B \subseteq X$ tales que A es un conjunto abierto, entonces se cumple que.

$A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$

Dem.

Sea $x \in A \cap \overline{B} \Rightarrow x \in A$ y $x \in \overline{B}$ así como A es abierto sabemos que existe $r > 0$ $\exists$ $B(x,r) \subseteq A$. Como $x \in \overline{B}$ sabemos que $\forall s > 0$ se tiene que $B(x,s) \cap B \neq \emptyset$. Como es para toda $s > 0$ tomemos $r = s$ así como $B(x,r) \subseteq A$ $\Rightarrow B(x,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A}$.

Así tenemos que $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow$ (dado que $x \in A \cap \overline{B}$) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$ así tenemos que

$x \in \overline{A \cap B}$

$\therefore A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ ∎

6. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$

¿Se cumple que $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$?

No.

Tomemos $n = 1$ y $A = (0,1)$ y $B = (1,2)$

$\overline{A} = [0,1]$ y $\overline{B} = [1,2]$

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \overline{A \cap B} = \emptyset$

Así vemos que $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \overline{A \cap B}$

7. ¿Se cumple que si $A \cap B \neq \emptyset$
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?
Demuestra ó da un contraejemplo

Tarea

8. Demostrar que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Donde $A, B \subseteq X$, (X, d) espacio métrico.

Dem.

$\subseteq)$ Sabemos $A \subseteq \overline{A}$ y $B \subseteq \overline{B} \Rightarrow$ $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. También sabemos que si $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$ (I). Así tenemos que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Sabemos que $\overline{A}$, y $\overline{B}$ son cerrados $\Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado $\Rightarrow$ $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow \overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

$\supseteq)$ Sabemos que $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$ $\Rightarrow$ por (I) $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \Rightarrow$ $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

$\therefore \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ ▨

9. Sea (X, d) un espacio métrico, Considere $S \subseteq X$, demuestre que $\mathring{S}$ es abierto } Tarea

10. Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre:

i) $\overline{\mathring{S}} \subseteq \overline{S}$

ii) $\mathring{S} \subseteq \mathring{\overline{S}}$

iii) $Fr(S) = \overline{S} - \mathring{S}$ tarea

i) $\overline{\mathring{S}} \subseteq \overline{S}$

Sea $x \in \overline{\mathring{S}} \Rightarrow$ para cualquier $r > 0$ $B(x, r) \cap \mathring{S} \neq \emptyset$,

Sabemos que $\mathring{S} \subseteq S \Rightarrow$

$B(x, r) \cap \mathring{S} \subseteq B(x, r) \cap S \Rightarrow$

$B(x, r) \cap S \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{S}$

$\therefore \overline{\mathring{S}} \subseteq \overline{S}$ ■

ii) $\mathring{S} \subseteq \mathring{\overline{S}}$

Sea $x \in \mathring{S} \Rightarrow \exists\, r > 0 \;\text{J}\; B(x, r) \subseteq \mathring{S} \subseteq S$

Sabemos que $S \subseteq \overline{S} \Rightarrow B(x, r) \subseteq \overline{S}$

$\Rightarrow x \in \overline{S}$ es más $x \in \mathring{\overline{S}}$ pues $B(x, r) \subset \mathring{\overline{S}}$

$\therefore \mathring{S} \subseteq \mathring{\overline{S}}$ ■

Tarea

- Probar ó dar un contraejemplo. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces $Int(A \cup B) = Int(A) \cup Int\, B$?

- Si $A, B \subset \mathbb{R}$ son conjuntos abiertos entonces el conjunto $A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in A \text{ y } a_2 \in A_2\}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$.