Celdas Nidificadas y el Teorema de Bolzano- Weierstrass

Una sucesión de conjuntos $\{A_n\}$ en un espacio métrico X, es decreciente si $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, ,2, ,3 \ldots\ldots$
Una sucesión decreciente de intervalos cerrados $\{I_n\}$, es una sucesión nidificada

Ejemplo La sucesión $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ es una sucesión nidificada.

Ejemplo Las bolas cerradas $\left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}$,con centro en x, y radio positivo $\frac{1}{n}$, forman una sucesión nidificada.

Definición 1. *Una celda abierta en* $\mathbb{R}$ *es el conjunto*

$$(a, b) = \{\overline{x} \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Una celda cerrada en $\mathbb{R}$ *es el conjunto*

$$[a, b] = \{\overline{x} \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Ejemplo El producto cartesiano $[a, b] \times [c, d]$ es una celda en $\mathbb{R}^2$ que se le llama rectángulo

Ejemplo El producto cartesiano $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ es una celda en $\mathbb{R}^3$ que se le llama paralelepipedo

Definición 2. *Una Celda abierta* $J \in \mathbb{R}^n$ *es el producto cartesiano*

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

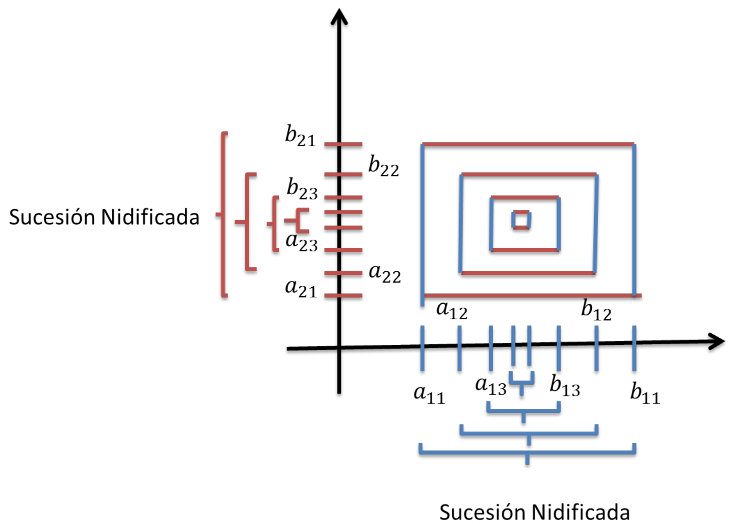
de n *celdas abiertas de números reales*

$$J = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i \ , \ i = 1, \cdots, n\}$$

Definición 3. *Un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *es acotado si esta contenido en alguna celda*

Teorema 1. *(Celdas Nidificadas) Sea* $\{I_k\}$ *una sucesión de celdas no vacia en* $\mathbb{R}^n$ *nidificada en el sentido* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset, \cdots \supset I_n$. *Entonces, existe un punto en* $\mathbb{R}^n$ *que pertenece a todas las celdas.*

Demostración. Sea $I_k = \{(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^n \mid a_{k_j} \leq x_i \leq b_{k_j} \ k, j = 1, \cdots n\}$



Cada celda $[a_{kj}, b_{kj}]$ $k, j \in \mathbb{N}$ forman una sucesión nidificada de números reales y por la completación de números reales existe un y_m que pertenece a cada celda. Aplicando este razonamiento a cada celda se tiene un punto $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ que pertenece al producto cartesiano de todas las celdas.

Teorema 2. *Bolzano-Weierstras Todo subconjunto infinito acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene un punto de acumulación*

□

Conjuntos Conexos

Definición 4. *Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A y B son separados si*

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \quad y \quad A \cap \overline{B} = \emptyset$$

Ejemplo Consideremos el conjunto $G = \mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales y consideremos los siguientes conjuntos

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$$
$$B_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$$

Se tiene entonces que

$$\overline{A_1} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \sqrt{2}\}$$
$$\overline{B_1} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \sqrt{2}\}$$

de manera que

$$\overline{A_1} \cap B_1 = \emptyset \quad y \quad \overline{B_1} \cap A = \emptyset$$

por lo que A,B son separados.

Definición 5. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A es un conjunto disconexo si existen $B, C \subset \mathbb{R}^n$ tal que*

$$B \neq \emptyset \neq C$$

$$A = B \cup C$$

$$\overline{B} \cap C = \emptyset \quad y \quad B \cap \overline{C} = \emptyset$$

Ejemplo Consideremos el conjunto $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales vamos a ver que $\mathbb{Q}$ no es conexo

Demostración. Sean

$$A_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$$

$$B_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$$

se tiene que

$$\overline{A_1} \cap B_1 = \emptyset \quad y \quad \overline{B_1} \cap A = \emptyset$$

además $\mathbb{Q} \subset A_1 \cup B_1$
por lo tanto $\mathbb{Q}$ no es conexo □

Ejercicio Demuestre que los únicos subconjuntos de la recta real que son conexos son los puntos y los intervalos.

Demostración. Todo subconjunto $\underline{X}$ de $\mathbb{R}$ que no sea ni un punto ni un intervalo es no conexo ya que $\exists\ a, b \in X$ y $c \in \mathbb{R}$ y $a < c < b$ y $c \notin X$, entonces $X = \{(-\infty, c) \cap X\} \cup \{(c, \infty) \cap X\}$ y por tanto X no sería conexo.

2) Un punto es conexo.

3) Todo intervalo es conexo

Sea X un intervalo y supongamos que X es no conexo, entonces $X = A_1 \cup B_1 \quad A_1 \cap B_1 = \emptyset \quad A_1 \neq B_1 \neq \emptyset$
$A_1 = X \cap A, \quad B_1 = X \cap B$ con A, B abiertos de $\mathbb{R}$ como $A_1 \neq \emptyset \quad \exists a_1 \in A_1$ y como $B_1 \neq \emptyset \quad \exists b_1 \in B_1 \quad a_1 \neq b_1 \quad a_1 < b_1$, sea $a =$sup$\{x \in A_1 | a_1 \leq x < b_1\}$ =sup$\{A_1 \cap [a, b)\}$.

El supremo $\exists$ pues $A_1 \cap [a_1, b)$ esta acotado, además $a \in [a_1, b] \Rightarrow a_1 \leq a \leq b_1 \Rightarrow a \in X$ pues X es un intervalo.

Vamos a ver que $a \notin A_1$ y $a \in B_1$.

a) Si $a \in A_1 \subset A$, entonces $a < b_1$ pues $b_1 \in B$, luego $a \in A \cap (-\infty, b)$
$\Rightarrow \exists \quad \varepsilon > 0$ tal que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset A \cap (-\infty, b) \Rightarrow a < a + \varepsilon < b_1 \quad a + \varepsilon \in X$ pues X es un intervalo
$a + \varepsilon \in X \quad a + \varepsilon \subset A \Rightarrow a + \varepsilon \in A_1 = A \cap X$ y $a_1 \leq a < a + \varepsilon < b_1$
y a no puede ser supremo del conjunto anterior.

b) Si $a \in B_1 \subset B$, entonces $a_1 < a$ pues $a_1 \in A_1$ luego $a \in (a_1, \infty) \cap B$ abierto
$\Rightarrow \quad x \in X$, por ser X un intervalo, luego
$[a - \varepsilon, a] \subset X$ y $a - \varepsilon, a] \subset B \Rightarrow [a - \varepsilon, a] \subset B_1 = X \cap B$
$\Rightarrow \quad a - \varepsilon$ es una cota superior del conjunto anterior $A_1 \cap [a_1, b_1]$ y como $a - \varepsilon < a$ luego a no puede ser el supremo de dicho conjunto. □

Teorema 3. *La totalidad del espacio $\mathbb{R}^n$ es conexo.*

Demostración. □

De no ser así, existirían 2 conjuntos abiertos ajenos no vacíos A, B cuya unión sería $\mathbb{R}^n$.

Sea $x \in A$ y $y \in B$ y considere el segmento S que une a x con y; es decir $S = \{x + t(y - x),\ t \in [0, 1]\}$.

Sean $A_1 = \{t \in \mathbb{R} | x + t(y - x) \in A\}, \quad B_1 = \{t \in \mathbb{R} | x + y(y - x) \in B\}$.
$A_1 \cap B_1 = \emptyset \quad A_1 \neq \emptyset \neq B_1$ y proporcionan una inconexión de S <u>CONTRADICCIÓN</u>
Ya que el segmento S, se puede ver como un intervalo, y los intervalos son conjuntos conexos.