Tarea 1
Calculo Diferencial e Integral III
fecha de entrega: 19/agosto/16

Normas, Producto Interior y Metricas

1.- Sea $\langle , \rangle$ un producto escalar en un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Demostrar que se cumplen:

$$(i) \quad La \quad identidad \quad de \quad Polarización \quad \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

$$(i) \quad La \quad ley \quad del \quad Paralelogramo \quad (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = 2(\|x\|^2 + \|x\|^2)$$

2.-Probar que La funcion de $\langle , \rangle$ con valores

$$(i) \quad \langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 \quad x, y \in \mathbb{R}^2$$

Define un producto interior

3.- Sea $d(f,g) = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$ Â¿Es d una metrica?

4.-Sean $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

5.-Sean $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_i \cdot x_j = 0$ si $i, j \in \{1, ..., n\},\ i \neq j$. Pruebe que

$$\|x_1 + ... + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + ... + \|x_n\|^2$$

6.-Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que

$$(a) \quad x \cdot y = 0 \ \Leftrightarrow \ \|x+y\| = \|x-y\|$$

$$(b) \quad x \cdot y > 0 \ \Leftrightarrow \ \|x+y\| > \|x-y\|$$

$$(b) \quad x \cdot y < 0 \ \Leftrightarrow \ \|x+y\| < \|x-y\|$$

7.-Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ diferentes de 0. Pruebe que

$$(a) \quad Si \quad \|x\| = \|y\| = \|x-y\|$$

entonces el angulo entre x,y es $\dfrac{\pi}{3}$

$$(b) \quad Si \quad \|x\| = \|x-y\| = \|x-y\|$$

entonces el angulo entre x,y es igual al angulo entre y, y-x 8.-Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que

$$(a) \quad \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \ \Leftrightarrow \ \exists\ \lambda > 0 \in \mathbb{R}\ tal\ que\ x = \lambda y$$

$$(b) \quad \|x-y\| = \|x\| + \|y\| \ \Leftrightarrow \ \exists\ \lambda < 0 \in \mathbb{R}\ tal\ que\ x = \lambda y$$

9.-Sea $C[a,b]$ el conjunto de las funciones reales continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$. Sean $f, g\, \epsilon\, C[a,b]$ definimos

$$d(f,g) = \max_{x\,\epsilon\,[a,b]} \{|f(x) - g(x)|\}$$

demostrar que d es una metrica.