

Tarea 4
Calculo Diferencial e Integral III
 fecha de entrega 14 octubre 2016

1.-Describir los conjuntos de nivel $f(x_1, \dots, x_n) = k$, para lo valores indicados de k

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2, k = 0, 1, 2, 3$

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, k = 0, 1, 2, 3$

(c) $f(x, y) = x^2 - y^2, k = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

2.-Describir los conjuntos de nivel $f(x_1, \dots, x_n) = k$, para lo valores indicados de k

$$(a) f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2, \quad k \geq 0$$

3.-Bosquejar la superficie de nivel

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 1\}$$

de la funcion

$$f(x, y, z) = z + \sqrt{x^2 + y^2}$$

4.-Probar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(xy)}{xy} = 1$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(xy)}{x} = 0$$

5.-Sean

$$c_{12} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right)$$

$$c_{21} = \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right)$$

$$c = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$$

Dar un ejemplo

(a) $c = c_{12} = c_{21}$

(b) $c \nexists, c_{12} \neq c_{21}$

(c) $c = c_{12}, c_{21} \nexists$

(d) $c \exists$, pero c_{12} y $c_{21} \nexists$

(e) $c \nexists$ y $c_{21} = c_{12}$

6.-Se considera la funcion $z = f(x, y)$. Supongamos que existen $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ y $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$

Probar que existe

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right)$$



y entonces

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = L$$

7.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

pruebe que f no es de clase C^1 , no es diferenciable pero si es continua

8.-Pruebe usando la definicion que las funciones son diferenciables en el punto dado

$$(a) f(x, y) = 3x^2 + 9y^2, \quad p = (1, 2)$$

$$(b) f(x, y) = 4x^2y^3, \quad p = (1, 1)$$

9.-Calcule las derivadas parciales de cada una de las funciones siguientes, donde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(a) f(x, y) = \int_x^{xy} g(t) dt$$

$$(b) f(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} g(t) dt$$

10.-Pruebe lo siguiente: Sean $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x}_0 \in A$ y $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\bar{u}\| = 1$ y $(a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que $f(A) \subset (a, b)$. Si $g : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $f(\bar{x}_0)$ y $D_{\bar{u}}f(\bar{x}_0)$ existe entonces existe

$$D_{\bar{u}}(g \circ f)(\bar{x}_0)$$

y ademas

$$D_{\bar{u}}(g \circ f)(\bar{x}_0) = g'(f(\bar{x}_0))D_{\bar{u}}f(\bar{x}_0)$$

