Tarea 5
Calculo Diferencial e Integral III
fecha de entrega 21 octubre 2016

1.-Comprobar que la funcion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es de clase c^1 por tanto es diferenciable y continua en $(0,0)$
(b) Comprobar que dicha funcion no es de clase c^2 y por tanto no se cumple el teorema de Shwarz

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x,y)$$

2.-Demuestre que el gradiente de

$$f(x,y,z) = e^{ax+by+cz}$$

es siempre paralelo al gradiente de

$$f(x,y,z) = ax + by + cz$$

y por consiguiente, siempre apunta en la direccion del vector constante (a,b,c)
3.-La temperatura en cualquier punto de una bola solida de metal, definida por la expresion

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

esta dada por

$$T(x,y,z) = 100e^{-(x^2+y^2+z^2)}$$

donde T esta medida en grados kelvin y x, y ,z en metros.
(a) En que lugar T es mayor y cual es su valor
(b) En que lugar T es menor y cual es su valor
4.-Dada una funcion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sea $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta))$. Suponer que se cumplen las propiedades de diferenciabilidad adecuadas, y mostar que

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \operatorname{sen}\theta \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos^2\theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) + \operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$$

donde $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$
(b) Verificar la formula

$$\|\nabla f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\|^2 = \left(\frac{\partial}{\partial r} F(r,\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} F(r,\theta)\right)^2$$

5.-En el tiempo $t = 0$, se lanza una particula desde el punto $(1,1,1)$ sobre la superficie

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$$

en una direccion normal a la superficie con una rapidez de 10 unidades por segundo. En que instante cruza la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 103$$

6.-Probar que las superficies

$$3x^2 + 2y^2 - 2z = 1, \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$$

son perpendiculares en el punto $(1, 1, 2)$
7.-Dada la funcion $u = u(r, s)$ de clase c^2, si $x = 2r - s$, $y = r + 2s$, hallar el valor de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

en funcion de las derivadas con respecto a r y s.
8.-Dada la funcion $u(x, y) = f(x - y) + g(x - y)$, donde f y g son funciones diferenciables, comprobar la ecuacion

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

9.-Si una superficie tiene por ecuacion

$$z = xf\left(\frac{x}{y}\right)$$

con f diferenciable,demostrar que todos los planos tangentes tienen un punto en comun
10.- Si f y g son funciones reales de una variable real que tienen derivadas de orden 2 continuas, se define

$$y(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

Probar que se verifica

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$