Guia para el quinto examen parcial
Calculo Diferencial e Integral III

Funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

1.- Encuentre una funcion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen coincida con una esfera de radio a centrada en el origen
2.- Encuentre una funcion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen coincida con un cono

Limites de Funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definicion 1. *Por sucesiones*
Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in A'$. Decimos que f tiene limite en x_0 y que su limite es $\ell \in \mathbb{R}^m$, si para toda sucesion $\{x_k\}$ contenida en $A - \{x_0\}$ que converge a x_0 se tiene que la sucesion $\{f(x_k)\}$ converge a ℓ. En este caso escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

y decimos que ℓ es el limite de f en x_0.

Definicion 2. *$(\epsilon - \delta)$*
Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y sea x_0 un punto de acumulacion de A. Se dice que $\ell \in \mathbb{R}^m$ es el limite de f en x_0, y se denota por:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Si dado $\forall\ \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(x) - \ell\| < \epsilon \quad \textit{cuando} \quad 0 < \|x - x_0\| < \delta$$

3.-Pruebe lo siguiente: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y f una funcion $f : A \to \mathbb{R}^m$ x_0 un punto de acumulacion de A. Escribimos f en terminos de sus componentes $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Entonces, la existencia del limite

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x})$$

es equivalente a la existencia de los limites

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f_i(\overline{x})$$

para $i = 1, \ldots, m$. En este caso se tiene ademas que

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = \left(\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f_1(\overline{x}), \ldots, \lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f_m(\overline{x}) \right)$$

4.-Pruebe lo siguiente:
Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ y x_0 un punto de acumulacion. Entonces la condicion $\lim_{\overline{x} \to \overline{x}_0} f(\overline{x}) = \bar{l}$, es equivalente a $\lim_{k \to \infty} f(\overline{x}_k) = l$ para toda sucesion $(\overline{x}_k)_{k=1}^{\infty}$ de elementos de A, con puntos diferentes de $\overline{x}_0$, tienda a $\overline{x}_0$.

Continuidad de Funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

5.-Pruebe lo siguiente:
Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funcion continua. Si $k \subset \Omega$ es compacto, entonces $f(k)$ es compacto.
6.-Pruebe lo siguiente:
$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funcion continua. Si $k \subset \Omega$ es conexo entonces $f(k)$ es tambien conexo.

Diferenciabilidad de Funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

7.-Demuestre que las siguientes funciones son diferenciables en todos los puntos de su dominio

$$(a) \quad f(x, y, z) = (x + y + z, yz - x^2, x + z)$$

$$(a) \quad f(x, y, z) = (x^2 + z, xy, z^2 - y)$$

Regla de la cadena de Funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

9.-Si $f(x, y) = (x \cos\ y, x \operatorname{sen}\ y)$ y $g(r, s, t) = (r, t - s)$, determinar la derivada

$$f \circ g \quad en \quad el \quad punto \quad \left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$