Teorema 1. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase c^1 y $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria de clase c^1. Entonces*

$$\int_\alpha \nabla f = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

Demostración. Consideremos la función $g(t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = (f \circ \alpha)(t) = f(\alpha(t))$ que es de clase c^1 por se composición de funciones de clase c^1. Aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$g'(t) = (f \circ \alpha)'(t) = (f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))' = \frac{\partial f(\alpha(t))}{x_1}\alpha_1'(t) + \frac{\partial f(\alpha(t))}{x_2}\alpha_2'(t) + ... + \frac{\partial f(\alpha(t))}{x_n}\alpha_n'(t) =$$

$$\nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$$

por lo tanto

$$\int_\alpha \nabla f = \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt = \int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a) = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

□

Ejemplo Halle $\int_C F \cdot dr$ donde $F = (e^x sen(y) - y)\hat{i} + (e^x cos(y) - x - 2)\hat{j}$ y C es el camino dado por $c(t) = \left[t^3 sen[\frac{\pi}{2}t]\hat{i} - \frac{\pi}{2}cos[\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}]\hat{j}\right]$ para $[0,1]$. El potencial es $f(x,y) = e^x sen(y) - xy - 2y$

Solución Tenemos que $c(0) = 0^3(sen\frac{\pi}{2}(0))\hat{i} - \frac{\pi}{2}cos(\frac{\pi}{2}(0) + \frac{\pi}{2})\hat{j} = 0\hat{i} + 0\hat{j}$

$f(c(0)) = f(0,0) = e^0 sen(0) - 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$

$c(1) = 1^3 sen(\frac{\pi}{2})\hat{i} - \frac{\pi}{2}cos(\frac{\pi}{2}(1) + \frac{\pi}{2})\hat{j} = 1\hat{i} - \frac{\pi}{2}(-1)\hat{j} = 1\hat{i} + \frac{\pi}{2}\hat{j}$

$f(c(1)) = f(1, \frac{\pi}{2}) = e^1 sen(\frac{\pi}{2}) - 1(\frac{\pi}{2}) - 2(\frac{\pi}{2}) = e^1 - \frac{\pi}{2} - \pi = e - \frac{3}{2}\pi$

$\therefore \quad \int_C F \cdot dr = f(c(1)) - f(0)) = e - \frac{3}{2}\pi - 0 = e - \frac{3}{4}\pi$

Corolario 1. *Si $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ es una trayectoria de clase C^1 y cerrada es decir $\alpha(b) = \alpha(a)$ entonces*

$$\int_\alpha \nabla f = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = 0$$

Campos conservativos y función potencial

Definición 1. *Un campo vectorial continuo $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice que es conservativo si existe en campo escalar $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, C^1$ tal que $F(x) = \nabla f(x)$, $\forall x \in U$. La función f se llama función potencial asociada al campo vectorial F.*

Tenemos entonces que las integrales de linea de un campo conservativo son independientes de la trayectoria y, si se conoce la función potencial, son faciles de calcular

$$\int_\alpha \nabla f = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

Vamos a ver una condición que nos permita determinar cuando un campo vectorial es conservativo

Definición 2. *Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es convexo si para cada pareja de puntos $x, y \in U$ el segmento rectilineo que los une esta incluido en U.*
El segmento que une x con y es:

$$\alpha(t) = x + t(y - x) \quad t \in [0, 1]$$

Ejemplos Son conjuntos convexos un circulo, un rectángulo, una esfera sólida, un paralelepipedo etc.
No son convexos una corona circular, un toro, etc. (en general un conjunto con agujeros)

Teorema 2. *Consideremos un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ y un campo vectorial de clase C^1 $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$. Las condiciones siguientes son equivalentes.*

1) F es conservativo, es decir, existe un campo escalar de clase C^2 $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$F(x) = \nabla f(x)$ $\forall x \in U$.

2) Se cumplen las igualdades

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} F_j(x), \quad i = 1, ..., n \quad \forall x \in U$$

Demostración. $1 \Rightarrow 2$
Suponemos que existe f tal que $F = \nabla f$ por tanto $F_i(x) = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ al ser f de clase c^2 satisface el teorema de Schwartz

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial(F_j(x))}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial(f_(x))}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial(f_(x))}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial(F_i(x))}{\partial x_j}$$

$2 \Rightarrow 1$
Supongamos que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} F_j(x), \quad i = 1, ..., n \quad \forall x \in U$$

entonces F es conservativo.
Haremos la prueba para el caso particular $F \subset \mathbb{R}^2$ tenemos que $F(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ donde $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ y consideremos un punto p sin perdida de generalidad situado en el origen y consideremos la trayectoria

$$\lambda : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \quad dado \quad por \quad \lambda(t) = t(x, y) \quad t \in [0, 1]$$

definimos la función
$$f(x,y)=\int_{\lambda}F\cdot d\lambda$$
por demostrar que $\nabla f=F$
tenemos que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{\lambda}F\cdot d\lambda\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^1 F(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)\right)dt=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^1([M(tx,ty),N(tx,ty)]\cdot(x,y))\right)dt$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^1(M(tx,ty)\cdot x+N(tx,ty)\cdot y)\right)dt=\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}(M(tx,ty)\cdot x+N(tx,ty)\cdot y)dt=$$

$$\int_0^1\left(M(tx,ty)+x\frac{\partial}{\partial x}M(tx,ty)+y\frac{\partial}{\partial x}N(tx,ty)\right)dt=\int_0^1\left(M(tx,ty)+xt\frac{\partial}{\partial x}M(tx,ty)+yt\frac{\partial}{\partial x}N(tx,ty)\right)dt=$$

$$\int_0^1\left(M(tx,ty)+xt\frac{\partial}{\partial x}M(tx,ty)+yt\frac{\partial}{\partial y}M(tx,ty)\right)dt=\int_0^1 t\left(x\frac{\partial}{\partial x}M(tx,ty)+y\frac{\partial}{\partial y}M(tx,ty)\right)+M(tx,ty)dt=$$

$$\int_0^1\left(\frac{d}{dt}(t(M(tx,ty)))\right)dt=t(M(tx,ty))|_0^1=M(x,y)$$

por lo tanto hemos probado que
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=M(x,y)=F_1(x,y)$$
de manera analoga se prueba que
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)=F_2(x,y)$$
de esta manera
$$\nabla f=(F_1(x,y),F_2(x,y))=F$$

□

Ejemplo Consideremos el campo $F:\rightarrow\mathbb{R}^2$ dado por $F(x,y)=(x+y^2,2xy)$. Compruebe que el campo es conservativo y encuentre su función potencial.

Salución Tenemos que
$$\begin{pmatrix}\frac{\partial(x+y^2)}{\partial y}=2y\\ \frac{\partial(2xy)}{\partial x}=2y\end{pmatrix}\Rightarrow\ F\ es\ conservativo$$
para la función potencial tomemos $\lambda:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}^2$ dada por $\lambda(t)=(tx,ty)$. Entonces

$$f(x,y)=int_{\lambda}F=\int_0^1 F(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)dt=\int_0^1 F(tx,ty)\cdot(x,y)dt=\int_0^1(tx+(ty)^2,2t^2xy)\cdot(x,y)dt$$

$$=\int_0^1 tx^2+t^2y^2x+2t^2xy^2dt=\int_0^1 tx^2+3t^2xy^2dt=x^2\frac{t^3}{2}+t^3xy^2\ |_0^1=\frac{x^2}{2}+xy^2$$

Rotacional de un campo vectorial

Sea $F = (F_1, F_2, F_3) : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vactorial. Consideramos un punto $x \in U$ en el que suponemos que existen todas las derivadas parciales. Se define el rotacional de F en el punto x, como el vector $rotF(x) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & F_3 \end{vmatrix}$

y si llamamos $D_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $D_2 = \frac{\partial}{\partial y}$, $D_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ entonces

$rotF(x) = (D_2F_3 - D_3F_2, D_1F_3 - D_3F_1, D_1F_2 - D_2F_1)$

Corolario: Para el caso particular de un campo $F(x, y, z)$ de clase C^1 definido en un conjunto $U \subset \mathbb{R}^3$ se tiene que $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es conservativo $\Leftrightarrow rotF = 0 \quad \forall x \in U$

Ejemplo Dado el campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x, y, z) = (3y^2z + ye^x, 6xyz + e^x, 3xy^2)$$

comprobar que es conservativo y hallar su función potencial

Solución tenemos que

$$\begin{pmatrix} F_1(x,y,z) = 3y^2z + ye^x \\ F_2(x,y,z) = 6xyz + e^x \\ F_3(x,y,z) = 3xy^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial(3xy^2)}{\partial y} = 6xy \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial(6xyz+e^x)}{\partial z} = 6xy \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial(3xy^2)}{\partial x} = 3y^2 \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial(3y^{2+e^x y})}{\partial z} = 3y^2 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial(6xyz+e^x)}{\partial x} = 6yz + e^x \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial(3y^2z+e^x)}{\partial z} = 6yz + e^x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} \Rightarrow F \text{ es conservativo}$$

para la función potencial tomemos $\lambda : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\lambda(t) = (tx, ty, tz)$. Entonces

$$f(x, y, z) = \int_\lambda F = \int_0^1 F(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)dt = \int_0^1 F(tx, ty, tz) \cdot (x, y, z)dt =$$

$$\int_0^1 (3(ty)^2(tz)+e^{tx}, 6(tx)(ty)(tz), 3(tx)(ty)^2)\cdot(x, y, z)dt = \int_0^1 (3t^3y^2z+tye^{tx})x+(6t^3xyz+e^{tx})y+(3t^3xy^2z)dt$$

$$\int_0^1 3t^3y^2zx + txye^{tx} + 6t^3xy^2z + 3t^3xy^2z + ye^{tx}dt = \int_0^1 12t^3xy^2z + txye^{tx} + ye^{tx}dt$$

$$= 12xy^2z\frac{t^4}{4} \mid_0^1 + xy\left(t\frac{e^{tx}}{x} - \int_0^1 \frac{e^{tx}}{x}dt\right) + y\frac{e^{tx}}{x} \mid_0^1 = 3xy^2z + xy\left(\frac{te^{tx}}{x} - \frac{1}{x}\frac{e^{tx}}{x} \mid_0^1\right) + y\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 3xy^2z + xy\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x^2}e^x + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{y}{x}(e^x - 1) = 3xy^2z + ye^x$$