Supongamos que una función F esta definida en $R = [a,b] \times [\alpha, \beta]$ y que para toda $x \in [a,b]$, F es una función integrable de y. Entonces la integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x,y)dy$$

define una función de x en [a,b] que podemos denotar

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} F(x,y)dy$$

Teorema 1. *Sea F una función continua en $(x,y) \in R$ y sea*

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} F(x,y)dy$$

entonces f es continua en [a,b] y por tanto integrable en $[a,b]$ y

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{a}^{b} F(x,y)dx$$

Demostración. □

Tenemos que dados $x_1, x_2 \in R$ con $|x_1 - x_2| < \delta$

$$|f(x_1 - f(x_2)| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} F(x_1,y)dy - \int_{\alpha}^{\beta} F(x_2,y)dy \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(x_1,y) - F(x_2,y) -| \, dy \leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\epsilon}{\beta - \alpha} dy = \epsilon$$

$\therefore$ f es una función continua y por tanto integrable en [a,b]

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} \int_{\alpha}^{\beta} F(x,y)dydx = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{a}^{b} F(x,y)dxdy = \int_{a}^{b} F(x,y)dx \int_{\alpha}^{\beta} dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_{a}^{b} F(x,y)dx$$

Teorema 2. *Sean tanto $F(x,y)$ como $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ continuas en $[a,b] \times [\alpha, \beta]$ entonces*

$$f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} F(x,y)dy$$

es diferenciable en [a,b] y

$$f'(x) = f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dy$$

es decir

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^{\beta} F(x,y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dy$$

Demostración. Sea $g(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dy$ tenemos entonces que

$$\int_a^x g(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_a^x \frac{\partial F(t,y)}{\partial t} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left[F(x,y) - F(a,y)\right] dy = \int_{\alpha}^{\beta} F(x,y)dy - \int_{\alpha}^{\beta} F(a,y)dy =$$

$$f(x) - f(a)$$

$\therefore$ derivando $g(x) = f'(x)$ □

Ejemplo Para cualquier $a > 0$ sea f definida en $I = \{-a \leq x \leq a\}$

$$f(x) = \int_0^1 e^{-xt} dt$$

a) Demostrar que f es continua en I
b) Evaluar la integral
c) Derivar mediante la derivación de la integral. Evaluar la integral resultante
d) Verificar que se obtiene el mismo resultado al derivar la parte b)
Para el inciso a) se tiene que dados x_1, x_2 en I tal que $|x_1 - x_2| < \delta$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \int_0^1 e^{-x_1 t} dt - \int_0^1 e^{-x_2 t} dt \right| = \left| \int_0^1 e^{-x_1 t} dt - e^{-x_2 t} dt \right| \leq \int_0^1 \left| e^{-x_1 t} dt - e^{-x_2 t} \right| dt$$

$$\leq \int_0^1 \epsilon dt = \epsilon$$

Para el inciso b)

$$\int_0^1 e^{-xt} dt = -\frac{e^{-xt}}{x} \Big|_0^1 = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x}$$

Para el inciso c)

$$f(x) = \int_0^1 e^{-xt} dt \Rightarrow f'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 e^{-xt} dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} e^{-xt} dt = \int_0^1 -te^{-xt} dt = t\frac{e^{-xt}}{x} - \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{x} =$$

$$t\frac{e^{-xt}}{x} - \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{e^{-xt}}{x} dt = \frac{e^{-xt}}{x} - \frac{1}{x} \left(\frac{e^{-xt}}{x} - \frac{1}{x} \right)$$

Para el inciso d) solo debemos derivar el resultado de la integral

$$\left(-\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x} \right)' = \frac{e^{-xt}}{x} - \frac{1}{x} \left(\frac{e^{-xt}}{x} - \frac{1}{x} \right)$$

Convergencia Uniforme

Se dice que la integral $F(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy$ converge uniformemente en el intevalo $a \leq x \leq b$ siempre que el 'residuo' de la integral pueda hacerse arbitrariamente pequeño simultaneamente para todos los valores de x en el intervalo bajo consideración o, más precisamente, siempre que para un número positivo ε, $\exists A = A(\varepsilon)$ que no dependa de x y sea tal que para $B \geq A$ se tiene que

$\left|\int_B^\infty f(x,y)dy\right| < \varepsilon$

Teorema 3. *Supongamos que una función F es continua $R = [a,b] \times [\alpha, \beta]$ donde $\beta < \infty$ ó $\beta = \infty$ y supóngase que para toda $x \in [a,b]$, f esta definida por*

$$f(x) = \int_\alpha^\beta F(x,y)dy$$

donde la integral es uniformemente convergente. Entonces f es continua en [a,b] y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta dy \int_a^b F(x,y)dx$$

Demostración. Como la integral es uniformemente convergente $\exists\ \eta(\epsilon)$ tal que $\forall \beta, \eta > \eta(\epsilon)$ se tiene

$$\left|\int_\eta^\beta F(x,y)dy\right| < \epsilon$$

y al ser $F(x,y)$ continua $\exists \delta > 0$ tal que $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces $|F(x_1,y) - F(x_2,y)| < \epsilon$ se tiene entonces que

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\int_\alpha^\beta F(x_1,y) - F(x_2,y)dy\right| = \left|\int_\alpha^\eta F(x_1,y) - F(x_2)dy + \int_\eta^\beta F(x_1,y) - F(x_2)dy\right|$$

$$\leq \left|\int_\alpha^\eta F(x_1,y) - F(x_2,y)dy\right| + \left|\int_\eta^\beta F(x_1,y)dy\right| + \left|\int_\eta^\beta F(x_2,y)dy\right| \leq \int_\eta^\beta \frac{\epsilon}{3(\beta-\eta)}dy + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

□

$\therefore$ f es continua en [a,b] y por tanto integrable en [a,b] y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \int_\alpha^\beta F(x,y)dydx$$

Me voy a fijar en la diferencia

$$\left|\int_a^b \int_\alpha^\beta F(x,y)dydx - \int_\alpha^\eta dy \int_a^b F(x,y)dx\right|$$

y veremos que tiende a cero cuando $\eta \to \beta$ tenemos entonces que

$$\left|\int_a^b \int_\alpha^\beta F(x,y)dydx - \int_\alpha^\eta dy \int_a^b F(x,y)dx\right| = \left|\int_a^b \int_\alpha^\beta F(x,y)dydx - \int_a^b dx \int_\alpha^\eta dyF(x,y)\right| =$$

$$\left|\int_a^b dx \int_\eta^\beta F(x,y)dy\right| \leq \int_a^b \left|\int_\eta^\beta F(x,y)dy\right| dx < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}dx = \epsilon$$

para todo $\eta, \beta > \eta(\epsilon)$

Teorema 4. *Sean $F(x,y)$ y $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ continuas en $\{a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta\}$ donde $\beta = \infty$. Supóngase que $\exists\ x_0$ en [a,b] para el cual*

$$\int_\alpha^\beta F(x_0,y)dy$$

converge uniformemente en [a,b]. Si se denota por $f(x)$ a este valor, entonces f es diferenciable y

$$f'(x)dx = \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x}F(x,y)dy$$

Demostración. Sea

$$g(x) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x}F(x,y)dy$$

por tanto tenemos que

$$\int_{x_0}^x g(t)dt = \int_\alpha^\beta dy \int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial t}F(t,y)dy = \int_\alpha^\beta F(x,y) - F(x_0,y)dy = \int_\alpha^\beta F(x,y)dy - \int_\alpha^\beta F(x_0,y)dy =$$

$$f(x) - f(x_0)$$

y derivando de ambos lados se tiene

$$g(x) = f'(x)$$

ahora bien como

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial t}F(t,y)dy$$

converge uniformemente $\exists\ \eta(\epsilon)$ tal que $\forall \eta, \beta > \eta(\epsilon)$ se tiene

$$\left|\int_\eta^\beta \frac{\partial}{\partial t}F(t,y)dy\right| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

$\therefore$

$$\left|\int_\eta^\beta F(x,y)dy\right| = \left|\int_\eta^\beta \int_{x_0}^x \frac{\partial F(t,y)}{\partial t}dt + F(x_0,y)dy\right| \leq \left|\int_\eta^\beta dy \int_{x_0}^x \frac{\partial F(t,y)}{\partial t}dt\right| + \left|\int_\eta^\beta F(x_0,y)dy\right|$$

$$= \left|\int_{x_0}^x dt \int_\eta^\beta \frac{\partial F(t,y)}{\partial t}dy\right| + \frac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b \left|\int_\eta^\beta \frac{\partial F(t,y)}{\partial t}dy\right| dt + \frac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{2(b-a)} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\square$

Crieterio de la M(Weierstrass)

Teorema 5. *Si* $\displaystyle\int_a^{\infty} M(x)dx$ *converge y si* $|f(x,y)| \leq M(x) \quad \forall y \in [c,d]$ *y* $\forall x$ *suficiendemente grande, entonces* $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x,y)dx$ *converge absoluta y uniformemente sobre* $[c,d]$.

Demostración. Por el criterio de comparación $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x,y)dx$ es absolutamente convergente y $\forall y \in [c,d]$. Sea $F(y) = \displaystyle\int_a^{\infty} f(x,y)dx$ si $|f(x,y)| \leq M(x) \quad \forall x > N_1$ y $\forall y \in [c,d]$, entonces $\forall y \in [c,d]$ y todos los $b_1, b_2 > N_1$ tenemos

$$\left|\int_a^{b_1} f(x,y)dx - \int_a^{b_1} f(x,y)dx\right| = \left|\int_{b_1}^{b^2} f(x,y)dx \leq \int_{b_1}^{b^2} |f(x,y)\right| |dx \leq \int_{b_1}^{b_2} M(x)dx$$

$$\therefore \lim_{b_1 \to \infty} \left|\int_a^{b_2} f(x,y)dx - \int_a^{b_1} f(x,y)dx\right| \leq \lim_{b_2 \to \infty} \int_{b_1}^{b_2} M(x)dx$$

es decir $\left|F(y) - \displaystyle\int_a^{b_1} f(x,y)dx\right| \leq \int_{b_1}^{\infty} M(x)dx$

tómese un $\varepsilon > 0$ cualquiera. Como $\displaystyle\int_a^{\infty} M(x)dx$ converge, existe un número $N \geq N_1$ tal que $\displaystyle\int_{b_1}^{\infty} M(x)dx < \varepsilon$ siempre que $b_1 > N$

$\therefore \displaystyle\int_a^{\infty} f(x,y)dx$ es uniformemente convergente sobre $[c,d]$ □

Ejemplo Pruebe que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{sen(xt)}{1+t^2}dt$ converge uniformemente $\quad \forall x$

Solución $\left|\dfrac{sen(xt)}{1+t^2}\right| \leq \left|\dfrac{1}{1+t^2}\right| = \dfrac{1}{1+t^2} = M(t)$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = artg(t)\Big|_0^{\infty} = \tfrac{\pi}{2} \quad \text{converge}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{sen(xt)}{1+t^2}dt \quad \text{converge uniformemente}$$