El teorema de la divergencia (tambien conocido como teorema de Gauss) es una generalización del teorema de Green, que relaciona una integral de superficie sobre una superficie cerrada con una integral de volumen.

Teorema de la divergencia

Teorema 1. *Sea Q una región sólida limitada o acotada por una superficie cerrada orientada por un vector unitario normal dirigido hacia el exterior de Q. si F es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en Q entonces*

$$\int_S F\ ds = \int\int_D F\cdot N\ dA = \int\int\int_Q div\ F\ dv$$

Demostración. Si hacemos $F(x,y,z) = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ entonces

$$\int\int_D F\cdot N\ dA = \int\int_D P\hat{i}\cdot N + Q\hat{j}\cdot N + R\hat{k}\cdot N\ dA = \int\int_D P\hat{i}\cdot N + \int\int_D Q\hat{j}\cdot N + \int\int_D R\hat{k}\cdot N\ dA$$

Por otro lado

$$\int\int\int_Q div\ F\ dv = \int\int\int_Q \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \int\int\int_Q \frac{\partial P}{\partial x}\ dV + \int\int\int_Q \frac{\partial Q}{\partial y}\ dV + \int\int\int_Q \frac{\partial R}{\partial z}\ dV$$

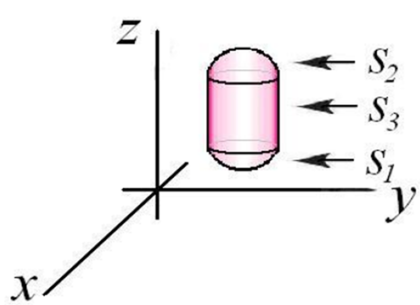
necesitamos probar

$$\int\int_D P\hat{i}\cdot N\ dA = \int\int\int_Q \frac{\partial P}{\partial x}\ dV\ \cdots(1)$$

$$\int\int_D Q\hat{j}\cdot N\ dA = \int\int\int_Q \frac{\partial Q}{\partial y}\ dV\ \cdots(2)$$

$$\int\int_D R\hat{k}\cdot N\ dA = \int\int\int_Q \frac{\partial R}{\partial z}\ dV\ \cdots(3)$$

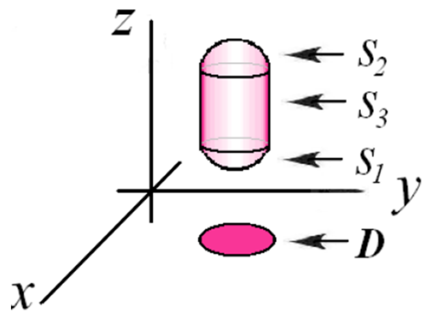
En este caso demostraremos (3)
Supongamos que nuestra región Q es tal que $Q = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3$, donde S_1 y S_2 las podemos ver como la gráfica de una función $f(x,y)$.



Con S_1 la superficie que se puede parametrizar $(x, y, f_1(x, y))$, $S2$ la otra superficie que se puede parametrizar $(x, y, f_2(x, y))$ y S_3 el conjunto

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f_1(x, y) \leq z \leq f_2(x, y)$$

donde también suponemos a D como la proyección tanto de S_1 como de S_2.



Se tiene entonces que

$$\int\int_D R\hat{k} \cdot N\ dA = \int\int_D R\hat{k} \cdot N_{s_1}\ dA + \int\int_D R\hat{k} \cdot N_{s_2}\ dA + \int\int_D R\hat{k} \cdot N_{s_3}\ dA$$

en el caso s_1 se tiene para la parametrización $(x, y, f_1(x, y))$

$$N_{s_1} = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, -1\right)$$

por lo tanto

$$\int\int_D R\hat{k} \cdot N_{s_1}\ dA = \int\int_D R(0,0,1) \cdot \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, -1\right)\ dA = -\int\int_D R(x, y, f_1(x, y))\ dA$$

en el caso s_2 se tiene para la parametrización $(x, y, f_2(x, y))$

$$N_{s_2} = \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, 1\right)$$

por lo tanto

$$\int\int_D R\hat{k} \cdot N_{s_2}\ dA = \int\int_D R(0,0,1) \cdot \left(-\frac{\partial f_1}{\partial x}, -\frac{\partial f_1}{\partial y}, 1\right)\ dA = \int\int_D R(x, y, f_2(x, y))\ dA$$

en el caso s_3 se tiene

$$\int\int_D R\hat{k} \cdot N_{s_3}\ dA = \int\int_D R(0,0,1) \cdot (a, b, 0)\ dA = 0$$

por lo tanto

$$\int\int_D R\hat{k} \cdot N\, dA = \int\int_D R\hat{k} \cdot N_{s_1}\, dA + \int\int_D R\hat{k} \cdot N_{s_2}\, dA = -\int\int_D R(x, y, f_1(x, y))\, dA + \int\int_D R(x, y, f_2(x, y))\, dA$$

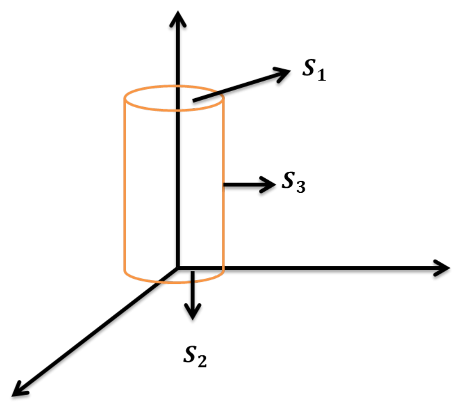
$$= \int\int_D \left(R(x,y,f_2(x,y)) - R(x,y,f_1(x,y))\right)\ dA = \int\int \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\ dz\right) dA = \int\int\int_Q \frac{\partial R}{\partial z}\ dV$$

□

Ejemplo Verifique el teorema de la divergencia, calculando el flujo del campo vectorial $F(x,y,z) = (xz, -y^2, xz)$ a través de la superficie cerrada que limita el cilindro

$$x^2 + y^2 \leq R^2 \quad con \quad 0 \leq z \leq 3$$

Solución Para calcular el flujo, consideramos $Q = s_1 \bigcup s_2 \bigcup s_3$ y parametrizamosa cada una de ellas



Para s_1 se tiene la parametrización

$$f_1 : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ \ dada \ \ por \ \ f_1(x,y) = (x,y,3)$$

donde

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

por lo tanto

$$N_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} \times \frac{\partial f_1}{\partial y} = (1,0,0) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

el campo evaluado en la parametrizacion

$$F(f_1(x,y)) = F(x,y,3) = (3,, -y^2, 3z)$$

y el flujo nos queda

$$\int_{s_1} F \cdot N_1\, ds_1 = \int\int_D F(f_1(x,y)) \cdot N_1(x,y)\, dxdy = \int\int_D (3x, -y^2, 3x) \cdot (0,0,1)\, dxdy = \int\int_D 3x\, dxdy$$

usaremos coordenadas cilindricas

$$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta), \quad z = z$$

donde

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \det\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ -\rho\operatorname{sen}(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

por lo tanto

$$\int\int_D 3x\ dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^R 3\rho^2\cos(\theta)d\rho d\theta = 0$$

Para s_2 se tiene la parametrización

$$f_1 : D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \quad dada \quad por \quad f_2(x,y) = (x,y,0)$$

donde

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq R^2\}$$

por lo tanto

$$N_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x}\times\frac{\partial f_2}{\partial y} = (0,0,-1)$$

el campo evaluado en la parametrizacion

$$F(f_2(x,y)) = F(x,y,0) = (0,-y^2,0)$$

y el flujo nos queda

$$\int_{s_2} F\cdot N_2\ ds_2 = \int\int_D F(f_2(x,y))\cdot N_2(x,y)\ dxdy = \int\int_D (0,-y^2,0)\cdot(0,0,-1)\ dxdy = 0$$

Para s_3 se tiene la parametrización

$$f_3 : D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \quad dada \quad por \quad f_3(x,y) = (R\cos(u), R\operatorname{sen}(u), v)$$

donde

$$D = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid u\in[0,2\pi] \quad v\in[0,3]\}$$

por lo tanto

$$N_3 = \frac{\partial f_3}{\partial u}\times\frac{\partial f_3}{\partial v} = (-R\operatorname{sen}(u), R\cos(u), 0)\times(0,0,1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R\operatorname{sen}(u) & R\cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (R\cos(u), R\operatorname{sen}(u), 0)$$

el campo evaluado en la parametrizacion

$$F(f_3(u,v)) = F(R\cos(u), R\operatorname{sen}(u), v) = (vR\cos(u), -R^2\operatorname{sen}^2(u), vR\cos(u))$$

y el flujo nos queda

$$\int_{s_3} F\cdot N_3\ ds_3 = \int\int_D F(f_3(u,v))\cdot N_3\ dudv = \int\int_D (vR\cos(u), -R^2\operatorname{sen}^2(u), vR\cos(u))\cdot(R\cos(u), R\operatorname{sen}(u), 0)\ dudv$$

$$= \int_0^3\int_0^{2\pi} R^2 v\cos^2(u) - R^3\operatorname{sen}^3(u) dudv = \frac{9}{2}\pi R^2$$

Por otro lado

$$div\ F = z - 2y + x$$

de esta manera

$$\int\int\int_Q div\ F\ dV = \int\int\int_Q (z - 2y + x)dV$$

usando de nuevo coordenadas cilindricas

$$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\,\text{sen}(\theta), \quad z = z$$

por lo tanto

$$\int\int\int_Q (z - 2y + x)dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^3 (z - 2\rho\,\text{sen}(\theta) + \rho\cos(\theta))dz d\theta d\rho = \frac{9}{2}\pi R^2$$