Función delta de Dirac

Considere la función $S : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida como

$$S(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

esta función se le conoce como Heaviside
Podemos ecribir entonces

$$S(x - x_0) = \begin{cases} 0 & si \quad x < x_0 \\ 1 & si \quad x > x_0 \end{cases}$$

Podemos decir que

$$\frac{d(S(x - x_0))}{dx} = \begin{cases} 0 & si \quad x \neq x_0 \\ \infty & si \quad x = x_0 \end{cases}$$

se deonta como

$$\delta(x - x_0) = \frac{d(S(x - x_0))}{dx} = \begin{cases} 0 & si \quad x \neq x_0 \\ \infty & si \quad x = x_0 \end{cases}$$

La función $\delta(x - x_0)$ se le conoce como la función **Delta de Dirac**
Si

$$\delta(x - x_0) = \frac{d(S(x - x_0))}{dx}$$

al integrar ambos lados en $(-\infty, x)$

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x' - x_0)\ dx' = S(x - x_0)$$

si $x_0 \in (-\infty, x)$ entonces $x_0 < x$ y por tanto $x - x_0 > 0$ de esta manera

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x' - x_0)\ dx' = 1$$

para x suficientemente grande

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x' - x_0)\ dx' = 1$$

Definición 1. *La función* ***Delta de Dirac*** *satisface*

$$i) \quad \delta(x - y) = 0 \quad para \quad x \neq y$$

$$ii) \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(x - y)\ dx = 1 \quad para \quad x \neq y$$

consideremos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x - x_0)\ dx$$

con $f(x)$ continua, acotada alrededor de x_0
Como $\delta(x-y)=0$ para $x \neq y$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x-x_0)\ dx = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f(x)\ \delta(x-x_0)\ dx \quad \epsilon > 0$$

en este caso si ϵ es suficientemente pequeño los valores de $f(x)$ en el intervalo de integración son aproximadamente igual a una constante $f(x_0)$. Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x-x_0)\ dx$$

con $f(x)$ bien comportada (continua y acotada) en los alrededores de x_0,
Si $\delta(x-x_0)=0$ si $x \neq x_0$ podemos cambier los limites de integración y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x-x_0)\ dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\ \delta(x-x_0)\ dx$$

donde $\epsilon > 0$ es un estero positivo arbitrario.
Si tomamos ϵ suficientemente pequeño $f(x) \to f(x_0)$ y entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \delta(x-x_0)\ dx = f(x_0)\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x-x_0)\ dx = f(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\ dx = f(x_0)$$

Por lo tanto para cualquier función continua $f(x)$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ \delta(x-x_0)\ dx = f(x_0)$$

Ejemplo Tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sen}(2x)\ \delta(x-4)\ dx = \mathrm{sen}(8x)$$

Mediante un proceso analogo se puede demostrar que

$$1) \quad \int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\ dx = \begin{cases} f(x_0) & si \quad x_0 \in [a,b] \\ 0 & si \quad x_0 \notin [a,b] \end{cases}$$

$$2) \quad \int_c^d f(x,y)\delta(y-y_0)\ dy = \begin{cases} f(x,y_0) & si \quad y_0 \in [c,d] \\ 0 & si \quad y_0 \notin [c,d] \end{cases}$$

$$3) \quad \int_{Region\ yz} f(x,y,z)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)\ dA = \begin{cases} f(x,y_0,z_0) & si \quad (y_0,z_0) \in \ Region\ yz \\ 0 & si \quad (y_0,z_0) \notin \ Region\ yz \end{cases}$$

Ejemplo Tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (5x^2y^3+4)\ \delta(x-2)\ \delta(y-3)\ dx\ dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(5x^2y^3+4)\ \delta(x-2)\ dx\right)\ \delta(y-3)\ dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(20y^3+4)\ \delta(y-3)\ dy = 544$$

Ejemplo Tenemos que

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta(r-a)\ \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\ \delta(\phi - \pi)\ r^2 \operatorname{sen}(\theta)\ d\phi\ d\theta\ dr =$$

$$\int_0^\infty \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \delta(\phi-\pi)\ d\phi\right) r^2 \operatorname{sen}(\theta)\ \delta(r-a)\ \delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\ d\theta\ dr = \int_0^\infty \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}(\theta)\ \delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\ d\theta\right) r^2\ \delta(r-a)\ dr =$$

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}(\theta)\ \delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\ d\theta\right)\ r^2\ \delta(r-a)\ dr = \int_0^\infty\ r^2\ \delta(r-a)\ dr = a^2$$

Función de Green

Definición 2. *Vamos a usar la delta de Dirac para definir una función G(x,y) que satisface*

$$1) \quad G(x,y) = G(y,x)$$

$$2) \quad \nabla^2 G(x,y) = \delta(x-y)$$

esta función se llama ***Función de Green***

Ejemplo Suponga que $G(x,y)$ satisface $\nabla^2 u = \rho$ con ρ reemplazado por $\delta(x-y)$ entonces

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x,y)\ \rho(y)\ dy$$

es una solución de $\nabla^2 u = \rho$

Solución Tenemos que

$$\nabla^2 \int_{\mathbb{R}^3} G(x,y)\ \rho(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 G(x,y)\ \rho(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x-y)\rho(y)\ dy = \rho(x)$$

La función $\rho(x) = \delta(x)$ representa una carga unitaria concentrada en un solo punto.
Así $G(x,y)$ representa el potencial en x debido a una carga colocada en y.