Funciones Armónicas

Definición 1. *Se dice que una función f(x,y,z) es armónica en una región D en el espacio, si satisface*

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0$$

en toda D.

Ejercicio Suponga que f es una función armónica en toda una región D acotada y encerrada por una superficie suave S, y que N es el vector normal unitario escogido sobre S. Demuestre que

$$a) \quad \int\int_S \nabla f \cdot N \; dA = 0, \qquad b) \quad \int\int_S f\nabla f \cdot N \; dA = \int\int\int \|\nabla f\|^2 dV$$

Solución a) Por el teorema de la divergencia

$$\int\int_S \nabla f \cdot N \; dA = \int\int\int_D \nabla \cdot \nabla f \; dV = \int\int\int_D \nabla^2 f \; dV = \int\int\int_D 0 \; dV = 0$$

Solución b) Por el teorema de la divergencia

$$\int\int_S f\nabla f \cdot N \; dA = \int\int\int_D \nabla \cdot f\nabla f \; dV$$

ahora bien

$$f\nabla f = \left(f\frac{\partial f}{\partial x}, f\frac{\partial f}{\partial y}, f\frac{\partial f}{\partial z}\right) \;\Rightarrow\; \nabla \cdot f\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(f\frac{\partial f}{\partial x}, f\frac{\partial f}{\partial y}, f\frac{\partial f}{\partial z}\right) =$$

$$f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = f\nabla^2 f + \|\nabla f\|^2$$

por lo tanto

$$\int\int_S f\nabla f \cdot N \; dA = \int\int\int_D \nabla \cdot f\nabla f \; dV = \int\int\int_D f\nabla^2 f + \|\nabla f\|^2 \; dV \underbrace{=}_{f \; armonica} \int\int\int_D \|\nabla f\|^2 \; dv$$

Ejercicio Sea S la superficie de la porción de la esfera sólida

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$$

que se encuentre en el primer octante y sea

$$f(x, y, z) = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

calcule $\displaystyle\int\int_S \nabla f \cdot N \; dA$

Solución Por el teorema de la divergencia

$$\int\int_S \nabla f \cdot N\ dA = \int\int\int_D \nabla \cdot \nabla f\ dV = \int\int\int_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) dV$$

ahora bien

$$f(x,y,z) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2+z^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2-y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{x^2+y^2-z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}, \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

por lo tanto

$$\int\int_S \nabla f \cdot N\ dA = \int\int\int_D \frac{dV}{x^2+y^2+z^2} \underbrace{=}_{coordenadas\ esfericas} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} \frac{\rho^2\operatorname{sen}(\phi)}{\rho^2} d\rho\ d\phi\ d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\operatorname{sen}(\phi) d\phi\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-a\cos(\phi)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\ d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\ d\theta = \frac{a\pi}{2}$$

Identidades de Green

Teorema 1. *Primera fórmula de Green Suponga que f y g son funciones escalares con primeras y segundas derivadas parciales continuas en toda una región Q cerrada y acotada por una superficie S suave. Se tiene entonces que*

$$\int\int_D (f\nabla g)\cdot N\ dA = \int\int\int_Q \left(f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g\right) dV$$

Demostración. Por el teorema de la divergencia

$$\int\int_D f\nabla g\cdot N\ dA = \int\int\int_Q div\ (f\nabla g)\ dV = \int\int\int_Q \nabla\cdot(f\nabla g)\ dV = \int\int\int_Q \nabla\cdot\left(f\frac{\partial g}{\partial x}, f\frac{\partial g}{\partial y}, f\frac{\partial g}{\partial z}\right) dV$$

$$= \int\int\int_Q \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\left(f\frac{\partial g}{\partial x}, f\frac{\partial g}{\partial y}, f\frac{\partial g}{\partial z}\right) dV = \int\int\int_Q \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial g}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial g}{\partial z}\right)\right) dV =$$

$$\int\int\int_Q \left(f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + f\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\right) dV =$$

$$\int\int\int_Q \left(f\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\right)\right) dV = \int\int\int_Q \left(f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g\right)$$

□

Teorema 2. *Segunda fórmula de Green Si f y g son funciones continuamente diferenciables de clase C^2, entonces*

$$\int\int_D (f\nabla g - g\nabla f)\cdot N\ dA = \int\int\int_Q (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\ dV$$

Demostración. Según el teorema anterior

$$\int\int_D (f\nabla g)\cdot N\ dA = \int\int\int_Q \left(f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g\right) dV$$

si intercambiamos las funciones f y g

$$\int\int_D (g\nabla f)\cdot N\ dA = \int\int\int_Q \left(g\nabla^2 f + \nabla g\cdot\nabla f\right) dV$$

A la primera expresión le restamos la segunda

$$\int\int_D (f\nabla g{\cdot}N - g\nabla f){\cdot}N\ dA = \int\int\int_Q \left(f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g - (g\nabla^2 f + \nabla g\cdot\nabla f)\right) dV = \int\int\int_Q \left(f\nabla^2 g - (g\nabla^2 f)\right) dV$$

□

Aplicaciones del teorema de la divergencia

El teorema de la divergencia se usa a menudo para desarrollos teóricos, principalmente como herramientas en física matemática. La clave de algunas de esas aplicaciones es que, si $F(x,y,z)$ es la tasa de flujo por unidad de área, la integral de superficie

$$\int\int_S F\cdot N\ dA$$

representa la tasa neta de flujo hacia afuera por unidad de volumen. Ésta es la razón del nombre de divergencia, porque

$$\int\int_S F\cdot N\ dA = \int\int\int_D div\ F\ dV$$

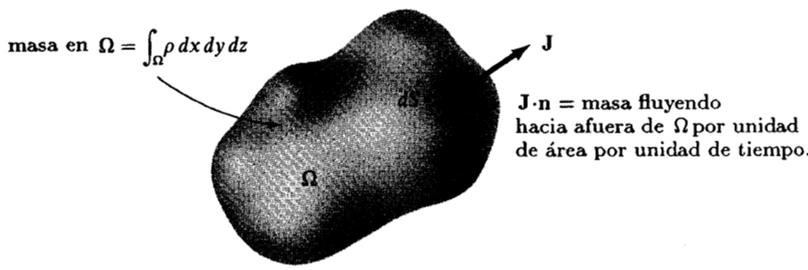
La integral de la izquierda es una integral de flujo y así determina el flujo total de fluido a través de la superficie S por unidad de tiempo. Por otra parte, la integral de la derecha mide el mismo flujo de fluido, calculando el fluido hacia afuera.

Ecuación de Conservación

Sea $V(t,x,y,z)$ un campo vectorial de clase c^1 en $\mathbb{R}^3$ para cada t y sea $\varrho(t,x,y,z)$ una función de clase c^1 con valores reales. Por ley de conservación de la masa para V y ρ, entenderemos que la condición

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\ dV = -\int_{Fr(\Omega)} J\cdot N\ dA$$

vale para todas las regiones $\Omega \in \mathbb{R}^3$, donde $J = \varrho V$



Si pensamos en ρ como una densidad de masa, esto es, la masa por unidad de volumen, y V como el campo de velocidad de un fluido, la condición dice simplemente que la tasa de cambio de la masa total en Ω es igual a la tasa a la cual la masa fluye hacia adentro de Ω

Ecuación de Continuidad en la dinámica de fluidos

Dado un fluido con densidad $\rho(t, x, y, z)$ que fluye en una región del espacio $\mathbb{R}^3$ con velocidad $v(x, y, z, t)$ en el punto (x, y, z) en el instante t. Si no se tienen fuentes ni sumideros entonces se cumple

$$\nabla \cdot \varrho v + \frac{\partial \varrho}{\varrho t} = 0$$

que se conoce como la Ecuación de continuidad de la dinámica de fluidos

Ecuación del calor

Sea $T(x, y, z, t)$ la temperatura en cada punto (x, y, z) de un sólido D en el instante t. Si el calor específico y la densidad de masa del sólido se denotan por c, ρ respectivamente, se cumple

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\,\rho}\nabla^2 T$$

donde k es una constante llamada conductividad térmica y $\dfrac{k}{c\,\varrho}$ es llamada la constante de difusión

Ejercicio Conservación de la masa Sea $v(t, x, y, z)$ un campo vectorial continuamente diferenciable sobre la región D en el espacio y sea $p(t, x, y, z)$ una función escalar continuamente diferenciable (La variable t representa el dominio del tiempo). La ley de la conservación de la masa establece que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_D p(t, x, y, z)\; dV = -\int\int_S pv \cdot N\; dA$$

donde S encierra a D.

a) Haga una interpretación fídica de la ley de la conservación de la masa si v es un campo de velocidades de flujo y p representa la densidad del fluido en el punto (x, y, z) en el tiempo t.

b) Use el teorema de la divergencia y la regla de Leibniz,

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_D p(t, x, y, z)\; dV = \int\int\int_D \frac{\partial p}{\partial t} dV$$

para demostrar que la ley de la conservación de la masa equivale a la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot pv + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

(En el primer término $\nabla \cdot pv$, la variable t se mantiene fija y en el segundo término $\frac{\partial p}{\partial t}$, se supone que el punto $(x, y, z) \in D$ está fijo)

Solución a) La integral $\int\int\int_D$ representa la masa de un fluido en el tiempo t. La ecuación dice que la razón instantanea de cambio de la masa es el flujo de un fluido sobre la superficie S que encierra la región D: la masa decrece si el flujo sale (el flujo del fluido sale de D), e incrementa si el flujo entra.

Solución b) Se tiene que

$$\int\int\int_D \frac{dp}{\partial t}\, dV = \frac{d}{\partial t}\int\int\int_D p(t,x,y,z)\, dV = -\int\int_S pv \cdot N\, dA = -\int\int\int_D \nabla \cdot pv\, dV \Rightarrow$$

$$\int\int\int_D \frac{dp}{\partial t}\, dV = -\int\int\int_D \nabla \cdot pv\, dV \Rightarrow \int\int\int_D \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot pv\right) dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot pv = 0$$

Ejercicio Ecuación General de Difusión Sea $T(t, x, y, z)$ una función con segundas derivadas continuas que da la temperatura en el tiempo t en el punto (x, y, z) de un sólido que ocupa una región D en el espacio. Si el calor específico y la densidad de masa del sólido se denotan por las constantes $c\ y\ \rho$, respectivamente, la cantidad $c\rho T$ se llama energía calorífica por unidad de volumen.
a) Explique por qué $-\nabla T$ señala en la dirección del flujo del calor.
b) Sea $-k\nabla T$ el vector de flujo de energía. (Aquí, la constante k se llama conductividad). Mediante la ley de la conservación de la masa, con $-k\nabla T = v$ y $c\rho T = p$, obtenga la ecuación de difusión (de calor)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\nabla^2 T$$

donde $K = \frac{k}{c\rho} > 0$ es la constante de difusión.

Solución a) ∇T son los puntos en la dirección de máximo cambio de temperatura,

Solución b) Suponiendo la Ley de la conservación de la masa con $-k\nabla T = pv$ y $c\rho T = p$ tenemos

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_Q c\rho T\, dV = -\int\int -k\nabla T \cdot N\, dA \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Ecuación de continuidad}} \nabla \cdot (-k\nabla T) + \frac{\partial (c\rho T)}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (-k\nabla T) = k\nabla^2 T \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho}\nabla^2 T = K\nabla^2 T$$