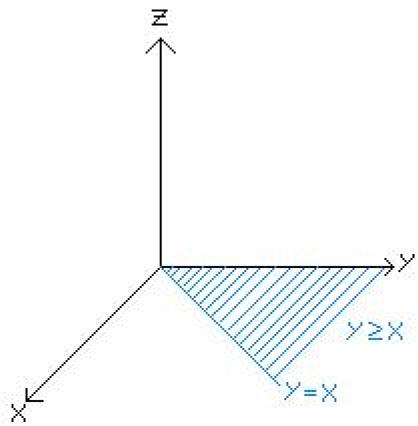
Integrales Impropias sobre regiones no acotadas

Ahora consideramos las integrales dobles impropias cuando la región de integración no está acotada.

Ejemplo:

Evaluar la integral doble impropia $\int\int_R \frac{y}{(1+y^2)^2}dA$ donde R es el conjunto $\{(x,y)|0 \leq x \leq \infty,\ x \leq y \leq \infty\}$



Sol. $\lim_{m\to\infty}\int_o^m \lim_{n\to\infty}\int_x^n \frac{y}{(1+y^2)^2}dydx = \lim_{m\to\infty}\int_0^m \lim_{n\to\infty} \left.\frac{-1}{2(i+y^2)}\right|_0^m dx =$
$\lim_{m\to\infty}\int_0^m \lim_{n\to\infty}\left[\frac{-1}{2(1+n^2)}+\frac{1}{2(1+x^2)}\right]dx = \lim_{m\to\infty}\int_0^m \frac{1}{2(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\lim_{m\to\infty} \left.\arctan x\right|_0^m =$
$\frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\arctan m - \arctan 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

Consideremos la Integral $\int\int_R \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1}dxdy$ donde $R=[0,\infty)\times[0,\infty)$ y vamos a comprobar que es convergente.

$$\int\int_R \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1}dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n\int_0^n \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1}dxdy\right) \underbrace{=}_{Polares} \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^n \frac{r}{r^{10}+1}drd\theta\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^n \frac{r}{r^{10}+1}dr\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}\int_0^n \frac{r}{r^{10}+1}dr\right) = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n \frac{r}{r^{10}+1}dr\right)$$

Esta última integral la vamos a separar de la siguiente manera

$$\int_0^\infty \frac{r}{r^{10}+1}dr = \int_0^1 \frac{r}{r^{10}+1}dr + \int_1^\infty \frac{r}{r^{10}+1}dr$$

Para la integral *roja* definimos $f(r) = \frac{r}{r^{10}+1}$ la cual esta definida para todo $r \in [0,1]$ y tenemos que el valor mínimo que alcanza f en [0,1] es 0 y para ver el valor máximo de f en [0,1] vamos a derivar

$$f(r) = \frac{r}{r^{10}+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-9r^{10}}{(r^{10}+1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{9^{\frac{1}{10}}} \therefore f\left(\frac{1}{9^{\frac{1}{10}}}\right) \approx \cdot 7$$

De esta manera tenemos que

$$0 \leq \frac{r}{r^{10}+1} \leq \cdot 7 \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{r}{r^{10}+1} dr \leq \cdot 7$$

Por tanto el valor de la integral existe.

Para la integral *azul* tenemos que

$$\int_1^\infty \frac{r}{r^{10}+1} dr \leq \int_1^\infty \frac{r}{r^{10}} dr \int_1^\infty \frac{1}{r^9} dr = \lim_{n\to\infty} \left(\int_1^n \frac{1}{r^9} dr \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{8r^8} |_1^n = \frac{1}{8}$$

$\therefore$ la integral $\int\int_R \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1} dxdy$ converge

Teorema 1. *Criterio de comparación para integrales múltiples de integrando positivo*

$$Si \quad 0 \leq f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$$

$$\int\int_D g(x,y)dxdy \quad converge \Rightarrow \int\int_D f(x,y)dxdy \quad converge$$

Demostración. Si $I_n = \int\int_{D_n} f(x,y)dxdy$ es una sucesión de números reales entonces es convergente si y solo si es de cauchy, es decir hay que probar que

$$Dado \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad N \quad tal \quad que \quad m,n \geq N \Rightarrow |I_m - I_n| < \epsilon$$

Por hipótesis g es convergente entonces la sucesión $J_n = \int\int_{D_n} g(x,y)dxdy$ es de cauchy $\therefore$

$$Dado \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad N \quad tal \quad que \quad m,n \geq N \Rightarrow |J_m - J_n| < \epsilon$$

siendo $m \geq n$ se cumple $D_m \supset D_n$ entonces para cualquier función h (f ó g) se tiene

$$\int\int_{D_m} h(x,y)dxdy = \int\int_{D_n} f(x,y)dxdy + \int\int_{h=Dm-D_m} f(x,y)dxdy$$

$\therefore$

$$\int\int_{D_m} h(x,y)dxdy - \int\int_{D_n} h(x,y)dxdy = \int\int_{h=Dm-D_m} h(x,y)dxdy$$

Como $f \leq g$ se tiene que

$$I_m - I_n = \int\int_{D_m} f(x,y)dxdy - \int\int_{D_n} f(x,y)dxdy = \int\int_{h=Dm-D_m} f(x,y)dxdy \leq$$

$$\int\int_{h=Dm-D_m} g(x,y)dxdy = \int\int_{D_m} g(x,y)dxdy - \int\int_{D_n} g(x,y)dxdy = J_m - J_n < \epsilon$$

como $h \geq 0$ $|I_m - I_n| = I_m - I_n$ y $|J_m - J_n| = J_m - I_n$ $\therefore$ $|I_m - I_n| \leq |J_m - J_n| < \epsilon$ por lo tanto I_n es una sucesión de cauchy $\therefore$ I_n es convergente

□

Analogamente se demuetra que

$$Si \quad 0 \leq f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in D$$

$$\int \int_D f(x,y)dxdy \quad diverge \Rightarrow \int \int_D g(x,y)dxdy \quad diverge$$

Aplicando el criterio de comparación comprobar si la integral $\int \int_D \left| \frac{y-x}{(x+y+1)((x^2+y^2)^5+1)} \right|$ en $D = [0,\infty) \times [0,\infty)$ converge.

Tenemos que

$$\left| \frac{y-x}{(x+y+1)((x^2+y^2)^5+1)} \right| \leq \frac{|y-x|}{|x+y+1||(x^2+y^2)^5+1|} \leq \frac{|y|+|x|}{|x+y+1||(x^2+y^2)^5+1|}$$

$$\leq \frac{1}{(x^2+y^2)^5+1}$$

$\therefore$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \frac{y-x}{(x+y+1)((x^2+y^2)^5+1)} \right| \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{((x^2+y^2)^5+1)} dxdy$$

esta última es convergente $\therefore$ la integral pedida es convergente.