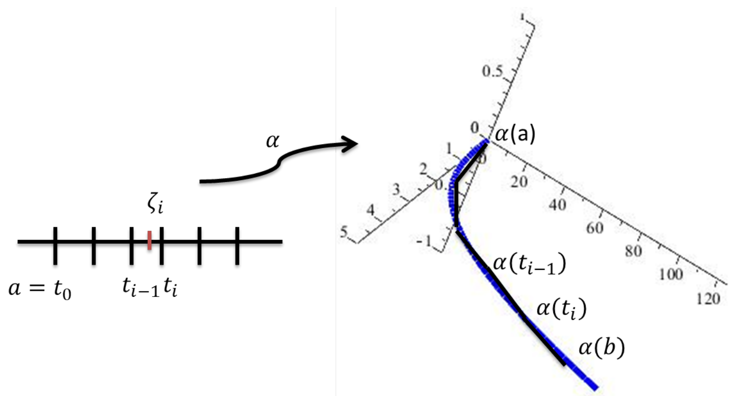
Integral de Trayectoria (Campos escalares)

Integral de Trayectoria (Área)

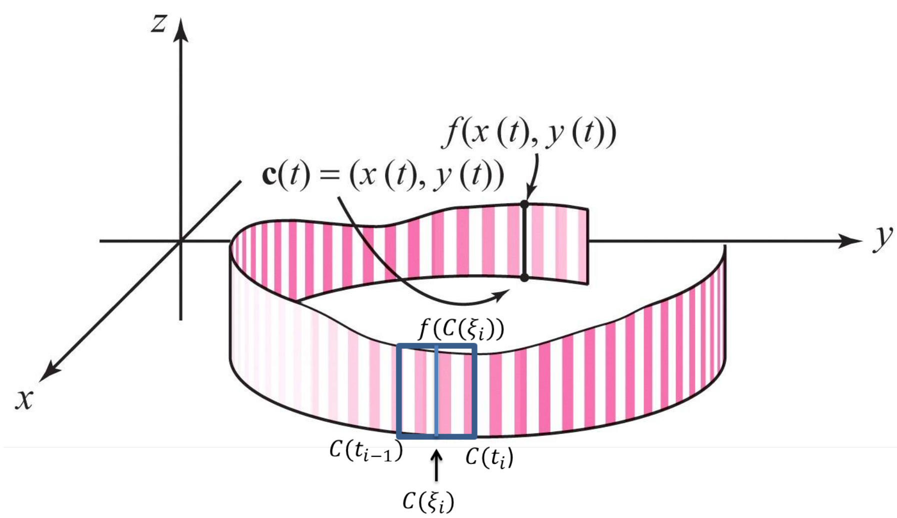
Cónsiderese la trayectoria $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ que tiene primera derivada continua en el intervalo $[a, b]$, y sea $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Esta partición determina una poligonal de n lados cuyos vértices están sobre la trayectoria c



La longitud del segmento que une los puntos $c(t_{i-1})$ y $c(t_i)$, esta dado por $\|c(t_i) - c(t_{i-1})\|$, y por el teorema del valor medio

$$\|c(t_i) - c(t_{i-1})\| = \|c'(\zeta *)(c(t_i) - c(t_{i-1})\| = \|{}^{,}_{,}(\zeta *)\|\triangle_{t_i}$$

Considérese además una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua. Ahora supóngase que se tiene una barda cuya base tiene la forma de una curva $c(t) = (x(t), y(t))$ y cuya altura $f(x(t), y(t))$. La integral $\int_c f ds$ representa el área de un lado de la barda.



Notese que el área A_i del rectángulo R_i se calcula

$$A_i = f(\xi_i) \cdot \|(c(t_i) - c(t_{i-1})\| = f(\xi_i) \cdot \|c'(\zeta*)\|\triangle_{t_i}$$

entonces el área A bajo f y sobre la trayectoria c, se aproxima

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \|c'(\zeta*)\|\triangle_{t_i}$$

por lo tanto

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \|c'(\zeta*)(c(t_i) - c(t_{i-1})\| = \int_a^b f(c(t))\|c'(t)\|dt$$

Definición 1. *La integral de trayectoria o la integral de $f(x, y, z)$ a lo largo de la trayectoria c esta definida cuando $c : I = [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es de clase c^1 y cuando la función compuesta $t \to (x(t), y(t), z(t))$ es continua en I, definimos esta integral*

$$\int_c f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\|c'(t)\|dt$$

Ejemplo Evaluar la integral de trayectoria
$\alpha(t) = (\ln(t), t, \sqrt{8t})$ donde $t \in [0, 3]$ y $f(x, y, z) = e^x + y + z^2$
Sol.
Tenemos que

$$f(\alpha(t)) = f(\ln(t), t, \sqrt{8t}) = e^{\ln(t)} + t + (\sqrt{8t})^2 = t + t + 8t = 10t$$

$$\alpha'(t) = \left(\frac{1}{|t|}, 1, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}}\right) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1 + \frac{2}{t}} = \sqrt{\frac{1 + t^2 + 2t}{t^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{(t+1)^2}{t^2}} = \frac{t+1}{t}$$

$\therefore$

$$\int_\alpha f dt = \int_0^3 (10t)\left(\frac{t+1}{t}\right)dt = \int_0^3 10(t+1)dt = 10\int_0^3 (t+1)dt = 10\left(\frac{t^2}{2} + t\,\Big|_0^3\right) = 10\left(\frac{9}{2} + 3\right) = 75$$

Vamos a calcular las siguientes integrales de trayectoria
a) Sea $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y $f(x, y) = x + y$
Sol.
Tenemos que
$f(\alpha(t)) = \cos(t) + \sin(t)$
por otro lado
$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-\cos(t))^2 + (\sin(t))^2} = 1 \therefore$

$$\int_c f = \int_c f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) + \sin(t)dt = \sin(t) - \cos(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

b) Sea $\beta(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ con $t \in [0,1]$ y $f(x,y) = x+y$
Sol.
Tenemos que
$f(\beta(t)) = t + \sqrt{1-t^2}$
por otro lado $\beta'(t) = \left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right) \Rightarrow \|\beta'(t)\| = \sqrt{(1)^2 + (\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}})^2} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \therefore$

$$\int_c f = \int_c f(\beta(t))\|\beta'(t)\|dt = \int_0^1 \left(t+\sqrt{1-t^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}+1\right)dt =$$

$$-\sqrt{1-t^2} + t\,\Big|_0^1 = 2$$

$\therefore$ El valor de la integral no depende de la parametrización

Proposición 1. *Sean 2 curvas de clase* c^1 $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\beta : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ *y sea el campo* $f : u \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *si las curvas son equivalentes entonces*

$$\int_\alpha f = \int_\beta f$$

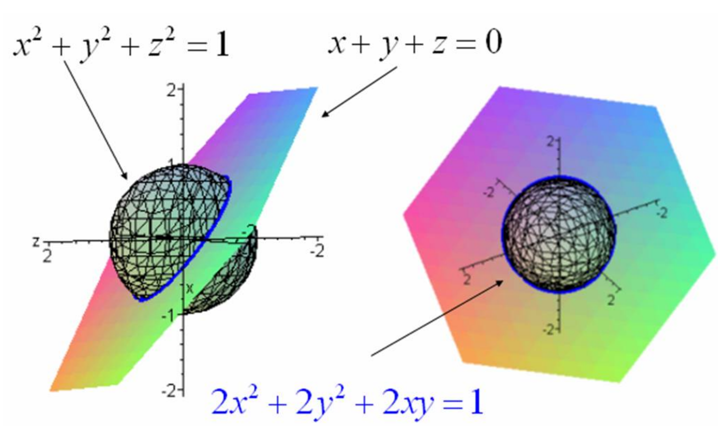
Demostración. Tenemos que $\alpha \sim \beta \to \alpha(t) = \beta(\varphi(t))$ para φ biyectiva y creciente, entonces derivando $\alpha'(t) = \beta'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \therefore \|\alpha'(t)\| = \|\beta'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\| = \|\beta'(\varphi(t))\| \cdot \varphi'(t)$ tenemos entonces que

$$\int_\alpha f = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\|dt = \int_a^b f(\beta(\varphi(t))) \cdot \|\beta'(\varphi(t))\| \cdot \varphi'(t)dt \underbrace{=}_{z=\varphi(t)} \int_c^d f(z) \cdot \|\beta'(z)\|dz = \int_\beta f$$

$\square$

Ejemplo Calcular la integral de trayectoria sobre la curva formada por la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano $x+y+z=0$. Si la función en (x,y,z) está dada´por $f(x,y,z) = x^2$.

Sol Tenemos que



$$Si \quad x+y+z=0 \quad entonces \quad z=-x-y \quad \therefore \quad sustituimos \quad en \quad x^2+y^2+z^2=1$$
$$obteniendo \quad x^2+y^2+(-x-y)^2=1 \quad simplificando \quad 2x^2+2y^2+2xy=1$$

Esta ecuación sobre el plano $x+y+z=0$ representa un circulo de radio 1, que se puede parametrizar por $c(t)=\cos(t)\cdot\overrightarrow{u}+\sin(t)\cdot\overrightarrow{v}$ donde $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\in Plano \quad x+y+z=0$ y en ese plano son vectores ortonormales, por ejemplo si tomamos los vectores $\overrightarrow{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$ y $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$, tanto $\overrightarrow{u}$ como $\overrightarrow{v}$ esta en el plano $x+y+z=0$ son ortogonales y de norma 1. Por lo tanto en nuestro caso podemos utilizarlos para dar una parametrización del circulo unitario en el plano $x+y+z=0$ teniendo asi:

$$c(t)=\cos(t)\cdot\overrightarrow{u}+\sin(t)\cdot\overrightarrow{v}=\cos(t)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1))+\sin(t)\cdot(\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1))=$$
$$\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{6}}-\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}},\frac{-2\sin(t)}{\sqrt{6}},\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}+\frac{\sin(t)}{\sqrt{6}}\right)$$

de donde

$$c'(t)=\left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{6}}+\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}},\frac{-2\cos(t)}{\sqrt{6}},\frac{-\sin(t)}{\sqrt{2}}+\frac{\cos(t)}{\sqrt{6}}\right)$$

Por tanto

$$\|c'(t)\|=\sqrt{\left(\frac{\cos(t)}{\sqrt{6}}+\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{-2\cos(t)}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{-\sin(t)}{\sqrt{2}}+\frac{\cos(t)}{\sqrt{6}}\right)^2}=$$
$$\sqrt{\frac{\cos^2(t)}{6}+2\frac{\sin(t)}{\sqrt{6}}\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}+\frac{\sin^2(t)}{2}+\frac{4}{6}\cos^2(t)+\frac{\sin^2(t)}{2}-2\frac{\sin(t)}{\sqrt{6}}\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}+\frac{\cos^2(t)}{6}}=$$
$$\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)}=1$$

Por otro lado

$$F(c(t))=F\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{6}}-\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}},\frac{-2\sin(t)}{\sqrt{6}},\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}+\frac{\sin(t)}{\sqrt{6}}\right)=\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{6}}-\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}\right)^2=$$
$$\frac{\sin^2(t)}{6}-2\frac{\sin(t)}{\sqrt{6}}\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}+\frac{\cos^2(t)}{2}$$

$\therefore$ la integral de trayectoria es

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin^2(t)}{6}-2\frac{\sin(t)}{\sqrt{6}}\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}+\frac{\cos^2(t)}{2}\right)dt\underbrace{=}_{*}\frac{2}{3}\pi$$

(*)Separando las integrales tenemos que

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2(t)}{6}dt=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\sin^2(t)dt=\frac{1}{2}t-\frac{\sin(2t)}{4}\,|_0^{2\pi}\;=\frac{\pi}{6}$$
$$\int_0^{2\pi}-2\frac{\sin(t)}{\sqrt{6}}\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}}dt=-\frac{2}{\sqrt{12}}\frac{\sin^2(t)}{2}\,|_0^{2\pi}\;=0$$
$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2(t)}{2}dt=\frac{1}{2}t+\frac{\sin(2t)}{4}\,|_0^{2\pi}\;=\frac{\pi}{2}$$