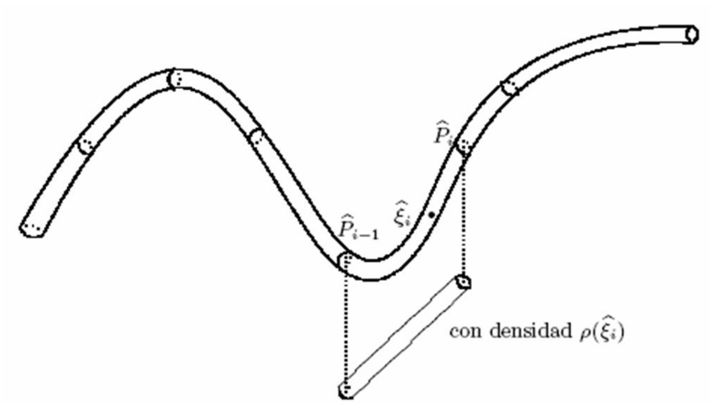
Integral de Trayectoria (Campos escalares)

Integral de Trayectoria (Masa)

Pensemos en un alambre ℓ del cual se conoce su densidad lineal (en gr/cm) en cada punto, por la función ρ. que asocia a cada punto $p \in \ell$, el número real $\rho(p) =$ densidad del alambre, podemos suponer que la imagen del alambre coincide con la imagen de cierta función escalar $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. Si tomamos la partición $a = t_0 < t_1 < ...t_n = b$ cuya partición asociada es $\lambda(t_0), \lambda(t_1), ..., \lambda(t_n)$ y en cada $[t_{i-1}, t_i]$ tomamos ϵ_i y bajo λ tenemos $\lambda(\epsilon_i) \in [\lambda(t_{i-1}), \lambda(t_i)]$ y la masa del alambre entre $\lambda(t_{i-1})$, $\lambda(t_i)$ es aproximadamente igual a la densidad del alambre en $\lambda(\epsilon_i)$ multiplicada por la longitud del alambre entre $\lambda(t_i)$, $\lambda(t_{i-1})$.



Es decir

$$M_i = masa \quad del \quad alambre \quad en \quad [\lambda(t_{i-1}), \lambda(t_i)] = \rho(\lambda(\epsilon_i)) \times \int_{t_{i-1}}^{t_i} \rho(\lambda(t)) \|\lambda'(t)\| dt =$$

$$\rho(\lambda(\epsilon_i)) \|\lambda'(\epsilon_i^*)\| (t_i - t_{i-1})$$

$\therefore$ La masa total del alambre esta dada por

$$M_\ell = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(\lambda(\epsilon_i)) \|\lambda'(\epsilon_i^*)\| (t_i - t_{i-1}) = \int_a^b \rho(\lambda(t)) \|\lambda'(t)\| dt$$

Ejemplo Hallar la masa de un alambre que tiene la forma de la hélice circular dada por la curva

$$\lambda(t) = (\cos(t), \sin(t), t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

si la densidad en el punto (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, x) = x^2 + y^2 + z^2$ gramos por unidad de longitud de alambre.

Solución Tenemos que

$$\rho(\lambda(t)) = \rho(\cos(t), \sin(t), t) = (\cos(t))^2 + (\sin(1))^2 + (t)^2 = 1 + t^2$$

mientras que

$$\lambda'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1) \;\Rightarrow\; \|\lambda'(t)\| = \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

por lo tanto

$$\int_\lambda f = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(1+t^2)dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}(1+t^2)dt = \sqrt{2}\left(t + \frac{t^3}{3}\,\Big|_0^{2\pi}\right) = \sqrt{2}\left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3}\right)$$

Proposición 1. *La integral de trayectoria de $f(x, y)$, a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, con $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ es:*

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}d\theta$$

Demostración. tenemos que en coordenadas polares

$$\begin{pmatrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \lambda(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$$

por lo que

$$\lambda'(\theta) = (r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)$$

$$\|\lambda'(\theta)\| = \sqrt{(r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta)^2 + (r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)^2} = \sqrt{(r(\theta))^2(r'(\theta))^2}$$

por lo tanto

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\lambda(\theta))\|\lambda'(\theta)\|d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{(r(\theta))^2(r'(\theta))^2}\; d\theta$$

□

Ejemplo Calcular la integral de trayectoria de $f(x, y) = 1$ sobre la trayectoria $r = \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$

Solución Para esto tenemos que

$$f(\lambda(\theta)) = f(\theta\cos\theta, \theta\sin\theta) = 1$$

mientras que

$$\|\lambda'(\theta)\| = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} = \sqrt{\theta^2 + 1}$$

por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} f(\lambda(\theta))\|\lambda'(\theta)\|d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2 + 1}d\theta = \frac{\theta}{2}\sqrt{\theta^2+1} + \frac{1}{2}\ln(\theta + \sqrt{\theta^2+1})\,\Big|_0^{2\pi} =$$

$$\pi\sqrt{1+4\pi^2} - \left(\frac{1}{2}\right)\ln(-2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})$$