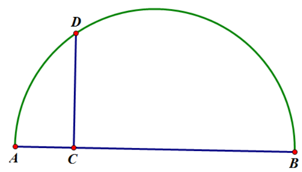
Cuadratura

Definición 1. *Cuadratura: en Geometría, determinación de un cuadrado equivalente en superficie a una figura geométrica dada.*

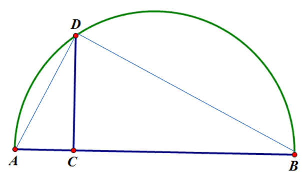
Cuadratura del Rectángulo

Lema 1. *el segmento CD de la figura es la media geométrica de AC y CB, es decir*

$$CD^2 = AC \cdot BC$$



Demostración. Trazamos los segmentos AD y DB y formamos los triángulos $\triangle ADC$, $\triangle CDB$ y $\triangle ADB$



Tenemos que

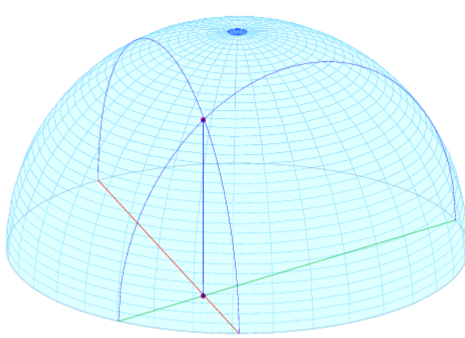
$$\triangle DCA \equiv \triangle BCD \equiv \triangle ADB$$

$\therefore$

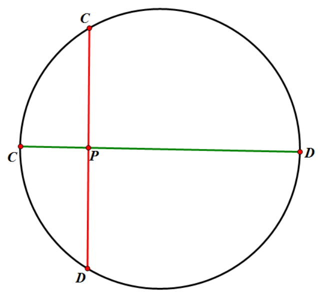
$$\frac{CD}{AC} = \frac{CB}{CD} \Rightarrow CD^2 = AC \cdot CB$$

$\square$

Por otro lado tenemos que la sección que resulta de cortar una esfera con un plano es un círculo. Por tanto las secciones que resultan de cortar una semiesfera por planos perpendiculares a la base son semicírculos.



Por lo anterior en la figura se tiene que el producto de los segmentos rojos es igual al producto de los segmentos verdes, pues los dos productos son iguales al cuadrado del segmento azul.

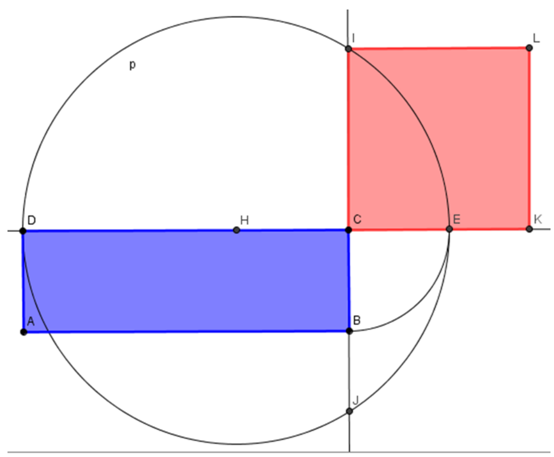


Y tenemos entonces la proposición III.35 de los Elementos, que afirma que en la figura adjunta,

$$CP \cdot PD$$

es constante,

Partimos entonces de un rectángulo ABCD. Dibujamos la recta r, recta a la que pertenece el lado CD, y después con centro en C y radio BC dibujamos un arco de circunferencia hacia fuera del rectángulo hasta cortar a la recta r. Ese punto de corte es el punto E.



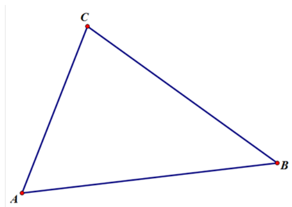
Trazamos ahora el punto medio del segmento del segmento DE, que llamamos H, y con centro en este punto y radio DH trazamos la circunferencia p. Ahora representamos la recta perpendicular a r que pasa por los vértices B y C del rectángulo, a la que llamamos s. Esta recta s corta a la circunferencia p en dos puntos, I y J. Tomamos uno cualquiera de ellos, por ejemplo I, y ya tenemos el lado del cuadrado: CI. Ahora solamente queda dibujar un cuadrado con lado este segmento y ya tenemos cuadrado nuestro rectángulo inicial. se tiene que $CD \cdot CE = CI \cdot CJ$. Pero $CI = CJ$, y además $CE = CB$. Sustituyendo en la igualdad anterior tenemos que

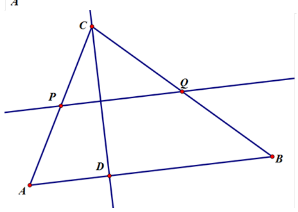
$$CD \cdot CB = CI^2$$

Como la primera parte de la igualdad es el área del rectángulo (base por altura) y la segunda es el área del cuadrado (lado al cuadrado), tenemos demostrada nuestras construcción.

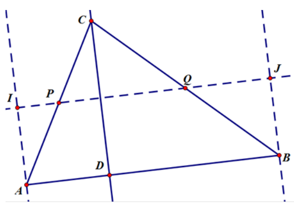
Cuadratura del Triángulo

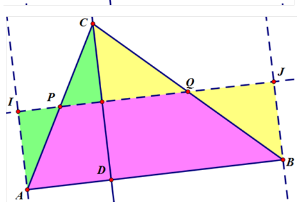
Vamos a ver cómo cuadrar un triángulo, esto es, cómo construir un cuadrado de la misma área que un cierto triángulo inicial.





Bien, partimos de un triángulo ABC. Tomamos uno de los vértices, C en nuestro caso, y dibujamos la altura correspondiente a dicho vértice. Calculamos ahora los puntos medios del segmento AC, que llamamos P, y el punto medio del segmento BC, que llamamos Q.

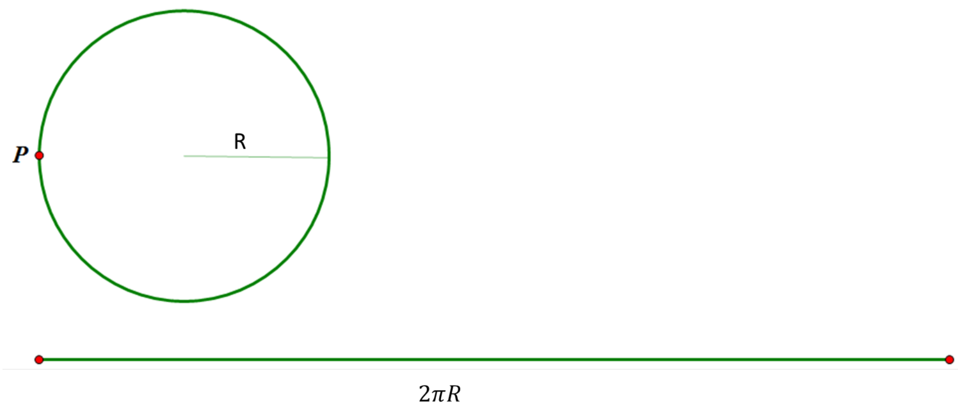




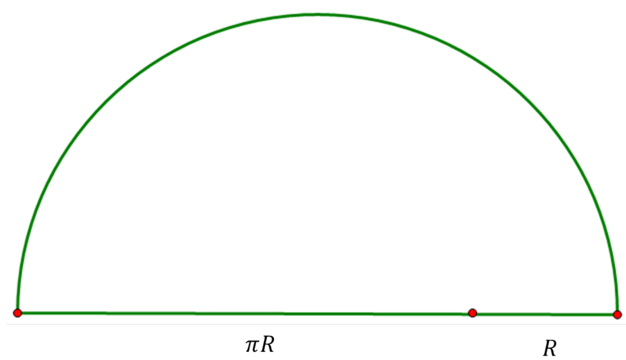
Dibujamos ahora la recta a la que pertenece el segmento PQ. Ahora construimos las rectas perpendiculares a esta recta que pasan por A y B. Llamamos I y J a los puntos de corte de estas rectas con la recta PQ. Entonces, el polígono AIJB es un rectángulo de la misma área que el triángulo ABC inicial.
El último paso de la cuadratura del triángulo es cuadrar el rectángulo.

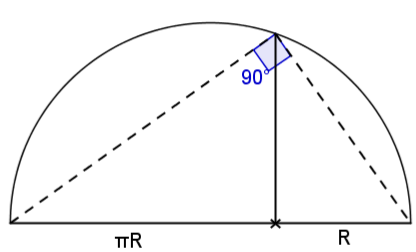
Cuadratura del Circulo

Partimos de una círculo de radio R (cuya área sera, entonces, πR^2). Marcamos un punto en él y hacemos girar el circulo hasta realizar un giro completo. El punto habrá marcado un segmento de longitud $2\pi R$.

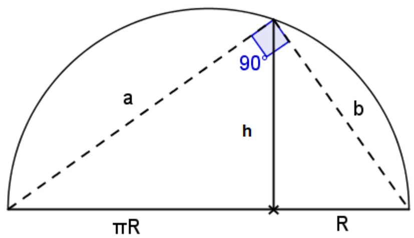


Tomamos un segmento de la mitad de longitud que éste, πR, lo unimos a otro segmento de longitud igual al radio del círculo inicial, R, y trazamos una semicircunferencia que tenga a ese segmento de longitud $\pi R + R$ como diámetro.

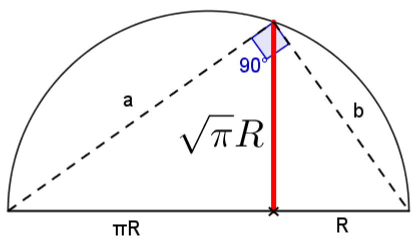




Trazamos ahora desde el punto de unión de los dos segmentos un segmento perpendicular a este diámetro que corte a la semicircunferencia. Se tiene entonces que el triángulo formado por los dos extremos del diámetro y ese punto de corte con la semicircunferencia es un triángulo rectángulo (precisamente en el ángulo que forma en la semicircunferencia en dicho punto de corte):



¿Cuál es la longitud de este segmento?. Llamemos h a esa longitud. Si nos fijamos en la figura, en realidad no tenemos un triángulo rectángulo, sino tres triángulos rectángulos. Son los que tienen lados con longitudes igual a a,h,πR (de hipotenusa a), h, b, R (de hipotenusa b) y a,b,$\pi R + R$ (de hipotenusa $\pi R + R$)



Utilizando el teorema de Pitágoras en los tres triángulos obtenemos las siguientes igualdades:

$$a^2 = h^2 + (\pi R)^2$$

$$b^2 = h^2 + R^2$$

$$(\pi R + R)^2 = a^2 + b^2$$

Sustituyendo los valores de a^2 y b^2 de las dos primeras ecuaciones en la tercera obtenemos lo siguiente:

$$(\pi R+R)^2 = h^2+(\pi R)^2+h^2+R^2 = 2h^2+(\pi R)^2+R^2$$

Desarrollando el cuadrado de la izquierda llegamos a:

$$(\pi R)^2 + R^2 + 2\pi R^2 = 2h^2 + (\pi R)^2 + R^2$$

de donde simplificando obtenemos:

$$2\pi R^2 = 2h^2 \Rightarrow h^2 = \pi R^2 \Rightarrow h = \sqrt{\pi}R$$

Hemos conseguido construir un segmento de longitud $\sqrt{\pi}R$:

Construyendo ahora un cuadrado con todos sus lados iguales a ese segmento tendremos por tanto un cuadrado de área:

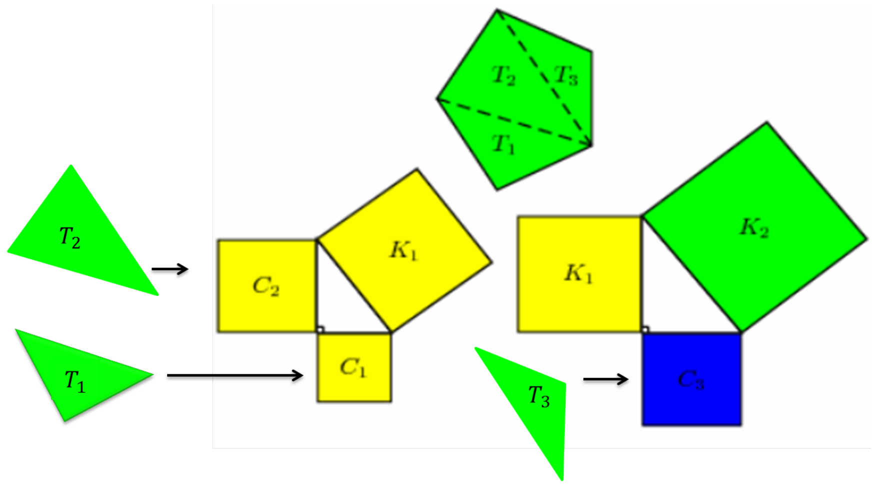
$$A = \sqrt{\pi}R \cdot \sqrt{\pi}R = \pi R^2$$

Es decir, un cuadrado con la misma área que el círculo inicial. Vamos, que hemos conseguido cuadrar el círculo inicial.

Cuadratura de un poligono de n-lados

Con estas herramientas a la mano es sencillo cuadrar cualquier polígono por triangulación y aplicaciones repetidas del Teorema de Pitágoras

Ejemplo Así, el polígono de la figura de abajo se descompone en los triángulos $T_1,\ T_2,\ T_3$ cuyas cuadraturas producen los cuadrados $C_1,\ C_2,\ C_3$ de lados ,$C_1,\ C_2,\ C_3$ respectivamente.


T_2
T_3
T_1
T_2
K_1
C_2
K_1
K_2
T_1
C_1
T_3
C_3