Definición 1. *Si $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Denotamos por D_{fA} al conjunto de discontinuidades de F en A, es decir*

$$D_{fA} = \{x \in A \mid f \quad es \quad discontinua \quad en \quad x\}$$

Corolario 1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrable sobre R. Entonces D_{fR} tiene interior vacio $intD_{fR} = \emptyset$*

Demostración. Si $\text{int}D_{fR} \neq \emptyset$ entonces existe R' tal que $R' \subset int(D_{fR}) \subset D_{fR} \subset R$ como f es integrable sobre R y $R' \subset R$ entonces f es integrable sobre R' de modo que existe $x_0 \in int(R')$ tal que f es continua en x_0 lo cual contradice el hecho de que f es discontinua en todo $x \in D_{fR}$ □

Medida Cero y Contenido Cero

Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene **medida cero** si para cada $\epsilon > 0$ existe un recubrimiento $\{U_1, U_2, ...\}$ de A por rectángulos tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \qquad y \qquad \sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \epsilon$$

Por ejemplo un conjunto formado por un número finito de puntos claramente tiene medida cero
Si A tiene infinitos puntos que pueden ordenarse formando una sucesión $a_1, a_2, ...$ entonces A tiene medida cero, pues para cada $\epsilon > 0$ se puede elegir U_i que sea rectángulo cerrado que contenga a_i con $v(U_i) < \frac{\epsilon}{2^i}$.
Entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \epsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... \right) = \frac{\epsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + ... \right) =$$

$$\frac{\epsilon}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{\epsilon}{2}(2) = \epsilon$$

1. $\mathbb{Q}$ es de medida cero.

   Demostración: como $\mathbb{Q}$ es numerable podemos formar $\{r_k\}_1^{\infty}$ y dado $\epsilon > 0$, sea

   $$I_k = \left(r_k - \frac{\epsilon}{2^{k+2}}, r_k + \frac{\epsilon}{2^{k+2}} \right)$$

   Por lo que

   $$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad y \quad v(I_k) = \frac{\epsilon}{2^{k+1}}$$

   y para la suma de los volumenes se tiene

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+1}} = \frac{\epsilon}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + ... \right) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

   $\therefore$ $\mathbb{Q}$ tiene medida cero

2. El conjunto de Cantor
   Demostración: Tenemos que

$$\mathcal{C}_0 = [0, 1]$$
$$\mathcal{C}_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$
$$\mathcal{C}_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{C}_n = \left[0, \frac{1}{3^n}\right] \cup \cdots \cup \left[1 - \frac{1}{3^n}, 1\right]$$

   Tenemos que $\mathcal{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k$ (Conjunto de Cantor)
   Cada $\mathcal{C}_k$ es la unión de 2^k intervalos de longitud $\frac{1}{3^k}$ si los llamamos $I_1, I_2, ..., I_{2^k}$ entonces

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} I_i \quad y \quad \sum_{i=1}^{2^k} vol(I_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

   por lo que dado $\epsilon > 0$ podemos tomar k tal que $\left(\frac{2}{3}\right)^k < \epsilon$.
   entonces $\mathcal{C}$ es de medida cero

3. En $\mathbb{R}^2$ consideramos la recta $y = y_0$
   Demostración: La semirecta derecha $A = \{(x, y_0) | x \in \mathbb{R}\}$ la cubrimos con

$$R_k = [k, k+1] \times \left[y_0 - \frac{\epsilon}{2^{k+3}}, y_0 + \frac{\epsilon}{2^{k+3}}\right]$$

   con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$$v(R_k) = 1 \cdot \left(\frac{\epsilon}{2^{k+2}}\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+2}} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

   Mientras que para la semirecta izquierda consideramos

$$R_k = [-k-1, -k] \times \left[y_0 - \frac{\epsilon}{2^{k+3}}, y_0 + \frac{\epsilon}{2^{k+3}}\right]$$

   $\therefore$

$$v(R_k) = 1 \cdot \left(\frac{\epsilon}{2^{k+2}}\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{k+2}} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

   $\therefore$ la recta entera se puede cubrir con una unión numerable de rectángulos cuya suma es menor a ϵ

4. Los intervalos cerrados $[a, b] \subset \mathbb{R}$ con $a < b$ no tienen medida cero
   Demostración: Supongamos que $[a, b] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ con U_n abierto, como $[a, b]$ es compacto existe

una subcubierta finita $\{U_n\}$ con

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(U_k) < \epsilon \quad pero \quad \sum_{k=1}^{\infty} v(U_k) \geq b-a$$

lo cual nos dice que la suma de volumenes no se puede hacer tan pequeña como se desee, por lo que el conjunto dado no es de medida cero

Teorema 1. *Si $A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup ...$ y cada A_i tiene medida cero, entonces A tiene medida cero.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Puesto que cada A_i tiene medida cero $\exists$ un recubrimiento $\{U_{i1}, U_{i2}, ...\}$ de A_i por rectángulos cerrados tales que la colección de todos los U_{ij} cubren a A y formamos la sucesión numerable

$$U_{11}, U_{1,2}, ...$$

$\therefore$

$$\sum_{j=1}^{\infty} v(U_{ij}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} < \epsilon$$

□

Un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ tiene **contenido cero** si para cada $\epsilon > 0$ existe un recubrimiento finito $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ de A por rectángulos tales que

$$\sum_{i=1}^{n} v(U_i) < \epsilon$$

Teorema 2. *Si A es compacto y tiene medida cero, entonces A tiene contenido cero*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Puesto que A tiene medida cero,$\exists$ un recubrimiento $\{U_1, U_2, ...\}$ de A por rectángulos tales que $\sum_{i=1}^{\infty} v(U_i) < \epsilon$. Dado que A es compacto, un número finito de $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ recubren a A y ademas $\sum_{i=1}^{n} v(U_i) < \epsilon$ □

Teorema 3. *Sea $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces la gráfica de ϕ tiene contenido cero*

Demostración. Siendo ϕ continua en el compacto $[a, b]$, es uniformemente continua en dicho intervalo. Es decir dado $\epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0$ tal que para $x, y \in [a, b]$ si $|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{n} < \delta$ y consideremos la partición de $[a, b]$ en n partes iguales

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

con $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ se tiene entonces que para $x, y \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ $\therefore$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \frac{\epsilon}{b-a} = \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon$$

□

Teorema 4. *Sea R un rectángulo cerrado y $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada.*
Sea $B = \{x \in \mathbb{R} | f \quad no \quad es \quad continua \quad en \quad x\}$ entonces si B es un conjunto de contenido cero f es integrable

Demostración. Vamos a dividir los subrectángulos R_{ij} en
$I)R_{ij} \bigcap B \neq \emptyset$ y
$II)R_{ij} \bigcap B = \emptyset$
de manera que para los rectángulos I se tiene que B es de contenido cero $\therefore$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v(R_{ij}) < \epsilon$$

Mientras que para los rectángulos II se tiene que f es continua y por tanto

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} - m_{ij} A(R_{ij}) < \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon}{2A(R)} A(R_{ij})$$

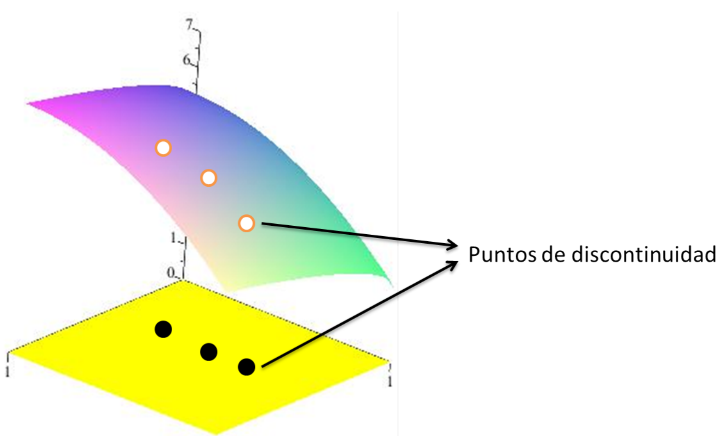
$\therefore$ Dada la partición P de R se tiene que

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} - m_{ij} A(R_{ij}) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v(R_{ij}) < \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\epsilon}{2A(R)} A(R_{ij}) + \frac{\epsilon}{2}$$

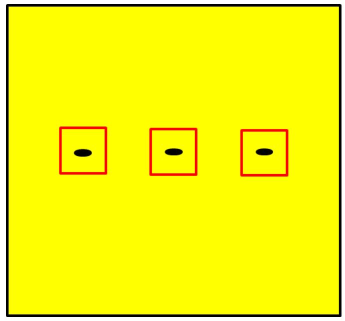
$$= \frac{\epsilon}{2A(R)} A(R_{ij}) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A(R_{ij}) + \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2A(R)} A(R) + \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

Teorema 5. *Sea f una función definida en un rectángulo R. Si el conjunto S de puntos donde f es discontinua tiene contenido cero, entonces f es integrable sobre R*



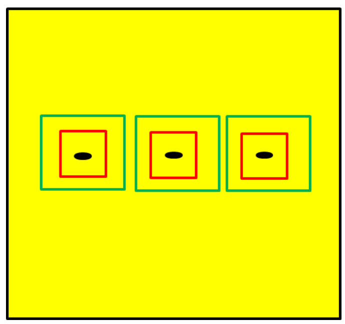
Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado y sea $R_1, R_2, ..., R_k$ el conjunto de rectángulos que cubren a S



tal que

$$\sum_{i=1}^{k} A(R_i) < \epsilon$$

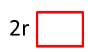
si se colocan sobre cada R_j un rectángulo R'_j con el mismo centro pero del doble de dimensiones



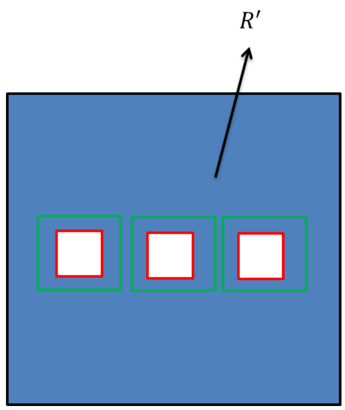
se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} A(R'_i) = \sum_{i=1}^{k} 4A(R_i) < 4\epsilon$$

Además, entre los rectángulos R_j habrá un lado más corto. Denotemos su longitud por $2r$



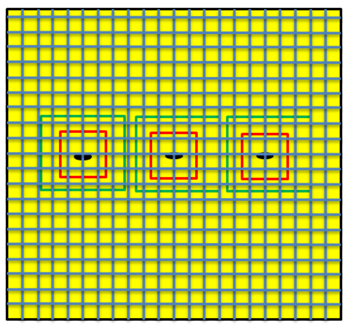
si tomo el conjunto R' el resto de R después que se han eliminado los interiores de los R_j.



Se tiene que sobre R' f es continua y por tanto uniformemente continua por lo tanto

$$|f(p) - f(q)| < \epsilon \quad si \quad \|p - q\| < \delta$$

para cualesquiera p,q en R'
Sea P una partición de R tal que $\|P\| < \delta < r$



Vamos a estimar

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)$$

Para esto dividimos los rectangulos de la partición P en dos conjnutos

$$R'_j \bigcap R_j \neq \emptyset \qquad R'_j \bigcap R_j = \emptyset$$

se tiene entonces que

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (M_{ij} - m_{ij}) A(R_{ij}) =$$

$$\Big(\sum \sum (M_{ij} - m_{ij}) A(R_{ij})\Big)_{R'_j \bigcap R_j \neq \emptyset} + \Big(\sum \sum (M_{ij} - m_{ij}) A(R_{ij})\Big)_{R'_j \bigcap R_j = \emptyset} < 4M\epsilon + \epsilon A = \epsilon(4M + A)$$

donde $M = \sup\{f(x)\}$ sobre R $\square$