Valor Promedio para Funciones Armónicas

Sea D una región abierta en $\mathbb{R}^2$, con frontera ∂D. Sea $u : D \bigcup \partial D \to \mathbb{R}$ una función continua de clase c^2 en D.
Suponer que $p \in D$ y $B_{\rho(p)} \subset D$ para $0 < \rho \leq R$.
Definimos

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho}\int_{\partial B_\rho} u \ ds$$

Ejercicio 1 Mostrar que

$$\lim_{\rho \to 0} I(\rho) = 2\pi \ u(p)$$

Solución Como la función u es continua entonces se cumple

$$\forall \ \epsilon > 0 \ \ \exists \ \delta > 0 \ \ tal \ \ que \ \ |u(q) - u(p)| < \epsilon \quad siempre \ \ que \quad \|p - q\| < \rho < \delta$$

ahora bien, si parametrizamos la frontera de la bola B_ρ se tiene

$$q(\theta) = p + \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

por tanto

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho}\int_{\partial B_\rho} u \ ds = \frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi} u(p + \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta))\rho \ d\theta = \int_0^{2\pi} u(p + \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)) \ d\theta$$

tenemos entonces que

$$|I(p) - 2\pi \ u(p)| = \left|\int_0^{2\pi} u(p + \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)) \ d\theta - \int_0^{2\pi} u(p) \ d\theta\right| = \left|\int_0^{2\pi} u(p + \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)) - u(p) \ d\theta\right|$$

$$\leq \int_0^{2\pi} |u(p + \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)) - u(p)| \ d\theta \underbrace{=}_{q(\theta) = p + \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)} \int_0^{2\pi} |u(q(\theta)) - u(p)| \ d\theta$$

$$\underbrace{<}_{continuidad \ de \ u} \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon}{2\pi} \ d\theta = \epsilon \quad siempre \ \ que \ \ \|p - q\| < \rho < \delta$$

por lo tanto

$$\lim_{\rho \to 0} I(\rho) = 2\pi \ u(p)$$

Ejercicio 2 Denotamos por $\mathbf{n}$ la normal unitaria exterior a ∂B_ρ y $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla \cdot \mathbf{n}$. Mostrar que

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \ ds = \int\int_{B_\rho} \nabla^2 u \ dA$$

Solución Tenemos que

$$\nabla\ u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

si ponemos

$$u'=-\frac{\partial u}{\partial y},\quad v'=\frac{\partial u}{\partial x}$$

se tiene

$$\nabla^2 u=\nabla\cdot\nabla u=\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

y por tanto

$$\int\int_{B_\rho}\nabla^2 u\ dA=\int\int_{B_\rho}\left(\frac{\partial v'}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dA\underbrace{=}_{Green}\int_{\partial B_\rho}u'\ dx+v'\ dy=\int_{\partial B_\rho}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{dy}{ds}\right)ds$$

$$=\int_{\partial B_\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{dy}{ds}-\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{dx}{ds}\right)ds=\int_{\partial B_\rho}\nabla u\cdot\left(\frac{dy}{ds},-\frac{dx}{ds}\right)ds=\int_{\partial B_\rho}\nabla u\cdot\mathbf{n}ds=\int_{\partial B_\rho}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\ ds$$

Ejercicio 3 Sea

$$I(\rho)=\frac{1}{\rho}\int_{\partial B_\rho}u\ ds$$

Muestre que

$$I'(\rho)=\frac{1}{\rho}\int\int_{B_\rho}\nabla^2 u\ dA$$

Solución si parametrizamos la bola B_ρ se tiene

$$q(\theta)=p+\rho(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)\quad\theta\in[0,2\pi]$$

por tanto

$$I(\rho)=\frac{1}{\rho}\int_{\partial B_\rho}u\ ds=\frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi}u(p+\rho(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta))\rho\ d\theta=\int_0^{2\pi}u(p+\rho(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta))\ d\theta$$

ahora derivando

$$I'(\rho)=\frac{d}{d\rho}\left(\int_0^{2\pi}u(p+\rho(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta))\ d\theta\right)=\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\rho}(u(p+\rho(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)))\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\nabla u\cdot(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta)\ d\theta=\frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi}\nabla u\cdot(\rho\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\theta)\ d\theta=\frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi}\nabla u\cdot\mathbf{n}\,d\theta=\frac{1}{\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\ ds=\frac{1}{\rho}\int\int_{B_\rho}\nabla^2 u\,dA$$

Ejercicio 4 Suponga que u satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 u=0$. Demuestre que

$$u(p)=\frac{1}{2\pi R}\int_{B_\rho}u\ ds$$

Solución Tenemos que por el ejercicio 1

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho}\int_{\partial B_\rho} u\ ds \ \Rightarrow \ \lim_{\rho\to 0} I(\rho) = 2\pi\ u(p)$$

Por el ejercicio 3

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho}\int_{\partial B_\rho} u\ ds \ \Rightarrow \ I'(\rho) = \frac{1}{\rho}\int\int_{B_\rho} \nabla^2 u\ dA$$

como $\nabla^2 u = 0$ tenemos

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\int_{\partial B_\rho} u\ ds\right) = \frac{1}{\rho}\int\int_{B_\rho}\nabla^2 u\ dA = \frac{1}{\rho}\int\int_{B_\rho} 0\ dA = 0$$

esto quiere decir

$$\frac{1}{\rho}\int_{\partial B_\rho} u\ ds = constante\ \ \forall\ \rho$$

en particular $\rho = R$ por lo que

$$\frac{1}{R}\int_{\partial B_\rho} u\ ds = constante$$

y por el ejercicio 1

$$\frac{1}{R}\int_{\partial B_\rho} u\ ds = 2\pi\ u(p) \quad \Rightarrow \quad u(p) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B_\rho} u\ ds$$

Este resultado se conoce como **Valor promedio para funciones armónicas**

Ejercicio 5 Usar lo anterior para mostrar que si u es una función armonica entonces u(p) se puede expresar como una integral de área

$$u(p) = \frac{1}{\pi R^2}\int\int_{B_\rho} u\ dA$$

Solución Según lo anterior

$$\int\int_{B_\rho} u\,dA = \int_0^R\int_0^{2\pi} u(p+\rho(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta))\rho\,d\theta\,d\rho = \int_0^R\left(\int_{\partial B_\rho} u\ ds\right)d\rho = \int_0^R 2\pi\rho\,u(p)\,d\rho = \pi R^2\ u(p)$$

por lo tanto

$$\int\int_{B_\rho} u\ dA = \pi R^2\ u(p) \ \Rightarrow\ u(p) = \frac{1}{\pi R^2}\int\int_{B_\rho} u\ dA$$

Ejercicio 6 Suponer que u es una función armónica definida en D y que u tiene una máximo local en un punto $p \in D$. Mostar que u debe ser una función constante en algún disco con centro en p

Solución Supongamos que $u(p)$ es un punto máximo sobre D, usando que

$$u(p) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\partial B_\rho} u\ ds$$

es un valor promedio de u en un disco con centro en P, al ser u continua $\exists\ r\ q \in\ \ D$ tal que $u(r) \geq u(p) \geq u(q)$ para mantener el promedio, al ser $u(p)$ un máximo local, la única posibilidad es que u sea constante en algún disco con centro en P.
Este resultado se conoce como **Principio del Máximo**

Definición 1. *Una función u definida en D se dice que es subarmónica si*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$$

Ejercicio Mostrar que u es subarmónica entonces u no puede tener un punto máximo en int(D)

Solución Suponga que u alcanza un máximo en int(D) entonces se cumplen

$$a) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) > 0$$

$$b) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0$$

de a) se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) \ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} > 0$$

por b) se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0 \ \Rightarrow\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$$

lo cual no puede ocurrir, por lo tanto u no alcanza un valor máximo en int(D)
Este resultado se conoce como **Principio del máximo para funciones subarmónicas**

Ecuación del calor

La ecuación de difusión (calor) esta dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\nabla^2 T$$

con $T(t,x,y,z)$ una función de clase c^2, $\dfrac{k}{c\rho}$ una constante de difusión, c el calor específico y ρ la densidad de masa.
Si $T(t,x)$ representa la temperatura en el tiempo t, en la posición x, en una barra uniforme conductora con lados aislados, entonces

$$\nabla^2 T = \frac{\nabla^2 T}{\partial x^2}$$

y la ecuación de difusión se reduce a la ecuación unidimensional del calor.

Principio del máximo para la ecuación del calor

La ecuación diferencial parcial parabólica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

se llama **Ecuación del calor**.
Sea $u(x,t)$ una función que satisface la desigualdad

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} > 0$$

en una región D del plano xt.
Se tiene que L(u) no alcanza su máximo en int D por que en ese caso se tendría

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0 \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

y con esas condiciones se tiene

$$L(u) \leq 0$$

y esto no puede ocurrir.

Teorema 1. *Sea $u(x,t)$ una función que satisface la desigualdad*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

en la region D. Entonces el máximo de u sobre $D \bigcup \partial D$ se alcanza en ∂D

Demostración. Ejercicio □