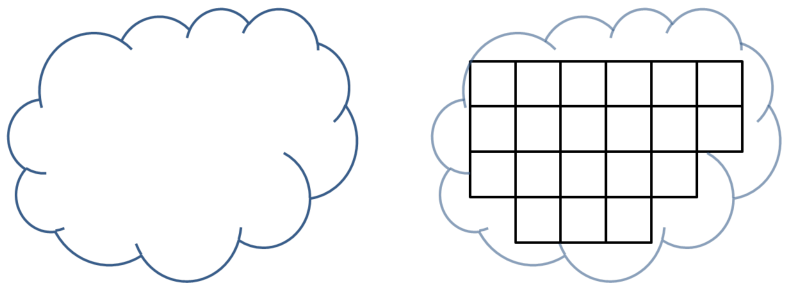
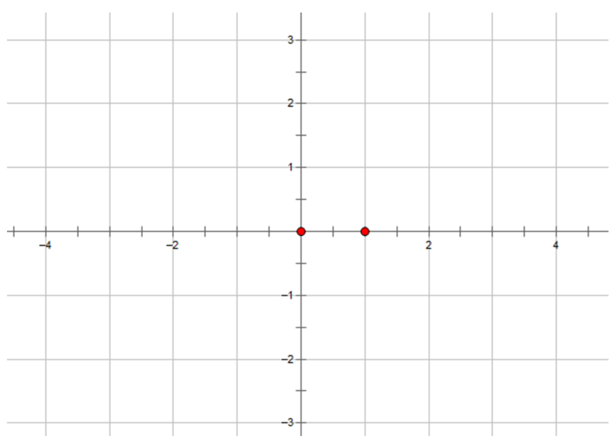
Área

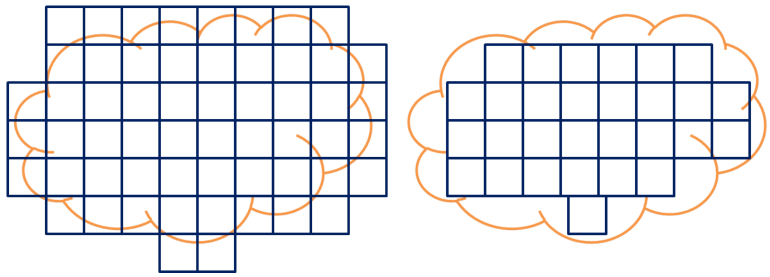
La noción intuitiva de área de una región en el plano es el número de unidades cuadradas contenidas en la región.



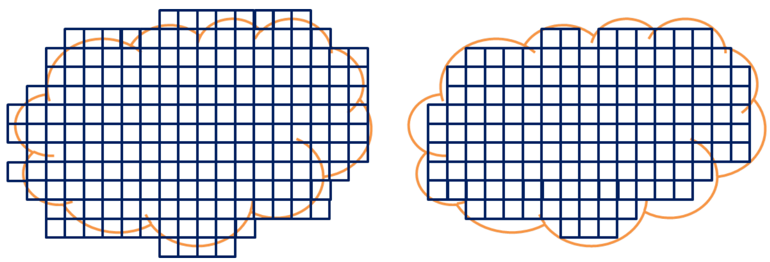
Al definir área aceptaremos que el área $A(S)$ de un conjunto debe ser un número no negativo con las propiedades siguientes:
1) Si S es un cuadrado de lado K entonces $A(S) = K^2$
2) El área del todo es la suma de las áreas de sus partes.
Más precisamente si S consiste de los conjuntos que no se traslapan S_1,...,S_n de áreas $A(S_1)$,...,$A(S_n)$ respectivamente, entonces el área de S es $A(S) = A(S_1)$+...+$A(S_n)$.
Los cuadrados congruentes proporcionan la manera más fácil de cubrir el plano sin espacios vacíos o traslapes.
Usaremos la rejilla asociada al sistema coordenado proporcionada por las rectas $x = 0, \pm 1, \pm 2$,... $y = 0, \pm 1, \pm 2$,... la cual divide al plano en cuadrados de lado 1.



Denotamos $A_0^+(S)$ el número de cuadrados que tienen puntos en común con S y $A_0^-(S)$ el número de aquellos que están completamente contenidos en S

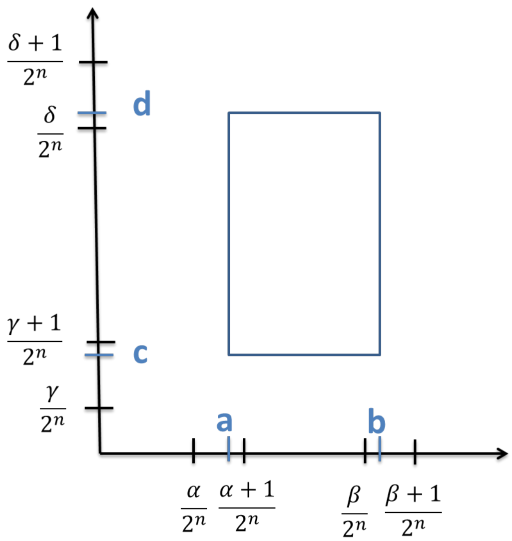


Dividamos ahora cada cuadrado en 4 partes iguales de lado $\frac{1}{2}$ y área $\frac{1}{4}$. Sea $A_1^+(S)$ la cuarta parte del número de aquellos subcuadrados que tienen puntos en común con S y $A_1^-(S)$ la cuarta parte de aquellos completamente contenidos en S.



Se tiene que $A_0^-(S) \leq A_1^-(S)$ y de modo semejante $A_0^+(S) \geq A_1^+(S)$, al continuar dividiendo cada cuadrado de lado $\frac{1}{2}$ en 4 cuadrados de lado $\frac{1}{4}$. Un dieciseisavo de esos cuadrados que tienen puntos en común con S y un dieciseisavo de esos cuadrados que estan completamente contenidos en S, se denotaran por $A_2^+(S)$ y $A_2^-(S)$.
Procediendo de esta forma se asocian los valores $A_n^+(S)$ y $A_n^-(S)$ con una división en cuadrados de lado 2^n.
Es evidente que los valores $A_n^+(S)$ forman una sucesión monótona decreciente y acotada que converge hacia un valor $A^+(S)$, mientras que los valores $A_n^-(S)$ crecen monotonamente y convergen hacia un valor $A^-(S)$.
El valor $A^-(S)$ representa el área interior, lo mejor que puede aproximarse el área de S desde abajo por medio de cuadrados congruentes contenidos en S, el área exterior $A^+(S)$ representa la mejor cota superior obtenible cubriendo a S por medio de cuadrados congruentes.
Podemos denotar $A_n^- = \sum\limits_{ik} 2^{-2n}$ con $R_{ik} \subset S$, $A_n^+ = \sum\limits_{ik} 2^{-2n}$ con $R_{ik} \cap S \neq \emptyset$ a partir de la definición resulta $0 \leq A_n^- \leq A_n^+$.
Las sumas A_n^- forman una sucesión no decreciente con la cota superior A_1^+ así, convergen hacia un limite $A^- = \lim\limits_{n\to\infty} A_n^-$.
De manera semejante Las sumas A_n^+ forman una sucesión no creciente con la cota superior A_1^- así, convergen hacia un limite $A^+ = \lim\limits_{n\to\infty} A_n^+$.
Si ambos valores concuerdan se dice que S es mesurable según Jordan y el valor común $A^-(S) = A^+(S)$ se llama contenido, o medida de Jordan de S.

Más generalmente, cualquier rectángulo S con lados paralelos a los ejes coordenados, $S : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$.



Dado un entero positivo n, se pueden encontrar enteros $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tales que

$$\alpha < a2^n \leq \alpha + 1 \qquad \gamma < c2^n \leq \gamma + 1$$

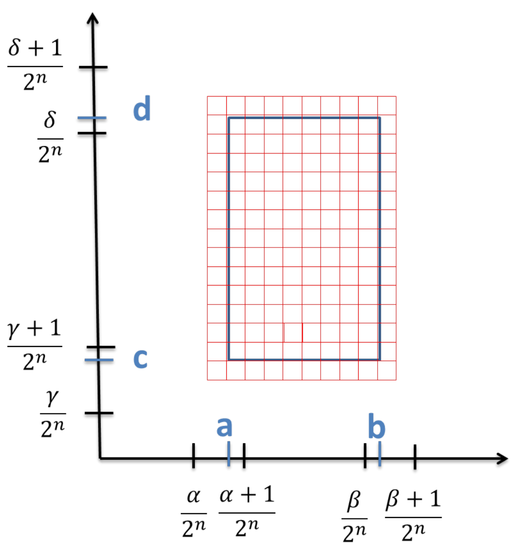
$$\beta \leq b2^n < \beta + 1 \qquad \delta \leq d2^n < \delta + 1$$

por lo tanto

$$\frac{\alpha}{2^n} < a \leq \frac{\alpha+1}{2^n} \qquad \frac{\gamma}{2^n} < c \leq \frac{\gamma+1}{2^n}$$

$$\frac{\beta}{2^n} \leq b < \frac{\beta+1}{2^n} \qquad \frac{\delta}{2^n} \leq d < \frac{\delta+1}{2^n}$$

Usando una rejilla adecuada de longitud 2^n tenemos que



$$\frac{\beta}{2^n} - \frac{\alpha+1}{2^n} + \frac{2}{2^n} \leq b - a + \frac{2}{2^n}$$
$$\frac{\beta+1}{2^n} - \frac{\alpha}{2^n} - \frac{2}{2^n} \geq b - a - \frac{2}{2^n}$$

Analogamente

$$\frac{\delta}{2^n} - \frac{\gamma+1}{2^n} + \frac{2}{2^n} \leq d - c + \frac{2}{2^n}$$

$$\frac{\delta+1}{2^n} - \frac{\gamma}{2^n} - \frac{2}{2^n} \geq d - c - \frac{2}{2^n}$$

Por lo tanto

$$A_n^+ = \left(\frac{\beta}{2^n} - \frac{\alpha+1}{2^n} + \frac{2}{2^n}\right)\left(\frac{\delta}{2^n} - \frac{\gamma+1}{2^n} + \frac{2}{2^n}\right)$$

$$A_n^- = \left(\frac{\beta+1}{2^n} - \frac{\alpha}{2^n} - \frac{2}{2^n}\right)\left(\frac{\delta+1}{2^n} - \frac{\gamma}{2^n} - \frac{2}{2^n}\right)$$

De la desigualdad

$$A_n^- \leq A \leq A_n^+$$

tenemos que

$$\left(\frac{\beta+1}{2^n}-\frac{\alpha}{2^n}-\frac{2}{2^n}\right)\left(\frac{\delta+1}{2^n}-\frac{\gamma}{2^n}-\frac{2}{2^n}\right)\leq A\leq\left(\frac{\beta}{2^n}-\frac{\alpha+1}{2^n}+\frac{2}{2^n}\right)\left(\frac{\delta}{2^n}-\frac{\gamma+1}{2^n}+\frac{2}{2^n}\right)$$

como

$$\left(b-a-\frac{2}{2^n}\right)\left(d-c-\frac{2}{2^n}\right)\leq\left(\frac{\beta+1}{2^n}-\frac{\alpha}{2^n}-\frac{2}{2^n}\right)\left(\frac{\delta+1}{2^n}-\frac{\gamma}{2^n}-\frac{2}{2^n}\right)$$

$$\left(\frac{\beta}{2^n}-\frac{\alpha+1}{2^n}+\frac{2}{2^n}\right)\left(\frac{\delta}{2^n}-\frac{\gamma+1}{2^n}+\frac{2}{2^n}\right)\leq\left(b-a+\frac{2}{2^n}\right)\left(d-c+\frac{2}{2^n}\right)$$

entonces

$$\left(b-a-\frac{2}{2^n}\right)\left(d-c-\frac{2}{2^n}\right)\leq A_n^-\leq A\leq A_n^+\leq\left(b-a+\frac{2}{2^n}\right)\left(d-c+\frac{2}{2^n}\right)$$

por lo tanto

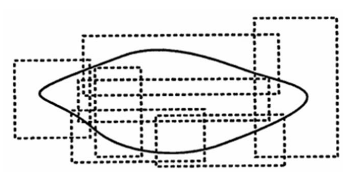
$$\lim_{n\to\infty}\left(b-a-\frac{2}{2^n}\right)\left(d-c-\frac{2}{2^n}\right)\leq\lim_{n\to\infty}A_n^-=A=\lim_{n\to\infty}A_n^+\leq\lim_{n\to\infty}\left(b-a+\frac{2}{2^n}\right)\left(d-c+\frac{2}{2^n}\right)$$

$A=\lim_{n\to\infty}A_n^+=\lim_{n\to\infty}A_n^-=(b-a)(d-c)$.

Formalizando un poco el concepto de Área

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Una cubierta de A es una secuencia de conjuntos (A_n) tal que A está contenido en su unión $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. En una cubierta dada los conjuntos A_n se pueden traslapar o intersectar y si para alguna N, $A_n=\emptyset$ para $n>N$, se dice que $A_1,A_2,...,A_N$ es una cubierta finita.

Hay muchos tipos de cubiertas, y una de ellas es aquella que esta formada por conjuntos Q_n con $n\geq 1$ en forma de rectángulos. Ésta también puede ser finita.



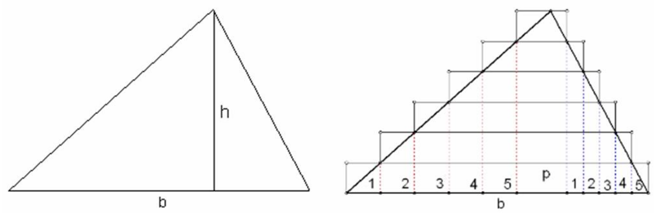
Ahora bien para cada intervalo I de la cubierta sea $I=b-a$ su longitud. Para cada rectángulo $Q=I\times J$ sea $\|Q\|=|I||J|$ de donde se sabe que $\|Q\|$ es entero positivo o cero. Partiendo del concepto de cubierta finita formada por rectángulos, se puede concluir que el área del conjunto dado, en este caso A, está definida de la siguiente manera:

$$\acute{a}rea\quad de\quad A=inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\|Q_n\|\right\}$$

con Q_n conjunto de rectángulos que forman la cubierta.

Ejemplo Probar usando la definición que el área de un triángulo de base b y altura h es $\dfrac{bh}{2}$

Demostración. Para ello vamos a dividir h en n partes iguales



y cada proyección sobre b genera una partición en n partes iguales (según la figura la partición de b es: {1,1},{2,2},{3,3},{4,4},{5,5},{p} que son el mismo número en que particionamos a h) por lo tanto tenemos los rectángulos:

$$\|Q_1\| = b\cdot\frac{h}{n},\quad \|Q_2\| = \left(b-\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n},\quad \|Q_3\| = \left(b-\frac{2b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n},...,\|Q_n\| = \left(b-\frac{(n-1)b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n}$$

Sumando las áreas se tiene

$$\sum_{k=1}^{n}\|Q_k\| = b\cdot\frac{h}{n} + \left(b-\frac{b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n} + \left(b-\frac{2b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n} + ... + \left(b-\frac{(n-1)b}{n}\right)\cdot\frac{h}{n} =$$

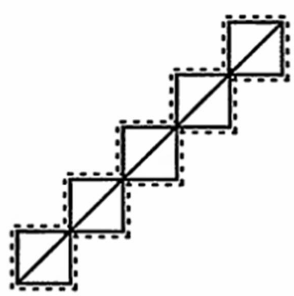
$$\frac{h}{n}\left[b+\frac{nb-b}{n}+\frac{nb-2b}{n}+...\frac{nb-(n-1)b}{n}\right] = \frac{bh}{n^2}\left[n+(n-1)+(n-2)+...+1\right] = \frac{bh}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

Por lo tanto el área para el triángulo sera:

$$A = inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\|Q_n\|\right\} = inf\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|Q_k\|\right\} = inf\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{bh}{n^2}\left[\frac{(n)(n+1)}{2}\right]\right\} = \frac{hb}{2}$$

□

Ejemplo Dado el segmento de línea diagonal $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1, y=x\}$ encontrar el área de A.



para esto definimos

$$Q_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}, \frac{k-1}{n} \leq y \leq \frac{k}{n}\} \quad K = 1, 2, ..., n$$

Entonces $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ es una cubierta rectangular para A por lo que

$$\sum_{k=1}^{n} \|Q_k\| = \|Q_1\| + \|Q_2\| + ... + \|Q_n\| = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + ... = n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

tenemos entonces que

$$\acute{a}rea(A) = inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \|Q_n\|\right\} = inf\left\{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|Q_k\|\right\} = inf\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right\} = 0$$