Ejemplo Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua dada por $y=f(x)$, mostrar que tiene área cero

Solución Como f es continua en $[a,b]$ entonces f es uniformemente continua, por lo que

$$\forall\ x,y\ \in\ [a,b]\ \ si\ \ |x-y|<\delta\ \ entonces\ \ |f(x)-f(y)|<\frac{\epsilon}{n}$$

Damos ahora una partición

$$P=\{a=t_0,t_1,...,t_n=b\}\ \ de\ \ [a,b]\ \ donde\ \ |t_i-t_{i-1}|<\frac{b-a}{n}$$

y definimos

$$Q_k=[t_{i-1},t_i]\times[f(t_{i-1}),f(t_i)]$$

por lo tanto

$$\|Q_k\|=|t_i-t_{i-1}|\cdot|f(t_i)-f(t_{i-1})|=\left|\frac{b-a}{n}\right|\cdot|f(t_i)-f(t_{i-1})|$$

y por lo tanto

$$ar\acute{e}a\ (funci\acute{o}n)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\|Q_k\|\right\}=\inf\left\{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{b-a}{n}\right|\cdot|f(t_i)-f(t_{i-1})|\right\}<\inf\left\{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b-a}{n}\right|\sum_{k=1}^{n}\cdot\frac{\epsilon}{n}\right\}=$$

$$\inf\left\{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\epsilon(b-a)}{n}\right|\right\}=0$$

Subaditividad del Área

Dado un conjunto A y Q_n una cubierta rectangular de A, se tiene

$$\acute{a}rea\ de\ A\leq\sum_{n=1}^{\infty}\|Q_n\|$$

En particular si tenemos dos conjuntos A, B tal que $A\bigcap B=\emptyset$ y $Q_{An},\ \{Q_{Bn}\},\ y\ \{Q_{(A\bigcup B)_n}\}$ cubiertas rectangulares de A, B y $A\bigcup B$ respectivamente entonces

$$\acute{a}rea\ \left(A\bigcup B\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\|Q_{(A\bigcup B)_n}\|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\|Q_{An}\|+\sum_{n=1}^{\infty}\|Q_{Bn}\|$$

tomando ínfimos

$$\acute{a}rea\ \left(A\bigcup B\right)\leq\acute{a}rea\ (A)+\acute{a}rea\ (B)$$

Necesitamos ahora una definición

Definición 1. *Si $A,B\subset\mathbb{R}^2$ sea*

$$d(A,B)=\inf\ \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\ \ con\ \ (a,b)\in\ A,\ \ (c,d)\in\ B$$

Sea $d(A,B)=\epsilon>0$ y si Q_n es una cubierta rectangular de $A\bigcup B$ dividimos cada Q_n en subrectángulos de diametro $\leq \epsilon$, y llamamos Q_n' a esta cubierta, se tiene entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Q_n'\|=\sum_{n=1}^{\infty}\|Q_n\|$$

ahora formamos las siguientes cubiertas Q_{A_n} los subrectángulos de Q_n' que intersectan a A y Q_{B_n} los subrectángulos de Q_n' que intersectan a B, por construcción se tiene que cada subrectángulo de Q_n' intersecta solo A o B pero no ambos, por lo que Q_{A_n} es una cubierta rectángular de A y Q_{B_n} es una cubierta rectángular de B y por tanto

$$\acute{a}rea\ (A)+\acute{a}rea\ (B)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\|Q_{A_n}\|+\sum_{n=1}^{\infty}\|Q_{B_n}\|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\|Q_n'\|=\sum_{n=1}^{\infty}\|Q_n\|$$

tomando ínfimos

$$\acute{a}rea(A)+\acute{a}rea(B)\leq\ \acute{a}rea\left(A\bigcup B\right)$$

podemos concluir entonces que

$$\acute{a}rea(A)+\acute{a}rea(B)=\ \acute{a}rea\left(A\bigcup B\right)$$

Se puede demostrar por inducción que para conjuntos $A_1,A_2,...,A_n$ tal que $A_i\bigcap A_j=\emptyset\ \forall\ i,j$ se tiene que

$$\acute{a}rea\left(A_1\bigcup A_2\bigcup...\bigcup A_n\right)\leq\acute{a}rea(A_1)+....+\acute{r}ea(A_n)$$

Si se tiene un conjunto $A\subset\mathbb{R}^2$ y A_k una cubierta de A no necesariamente rectangular entonces

$$\acute{a}rea\ (A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\acute{a}rea\ (A_n)$$

para ver esto sea $\epsilon>0$ y para cada $k\geq 1$ tomamos una cubierta rectangular Q_{n_k} de A_k tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Q_{n_k}\|\leq\acute{a}rea\ (A_k)+\frac{\epsilon}{2^k}$$

y tenemos que

$$\acute{a}rea\ (A)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\|Q_{n_k}\|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\acute{a}rea\ (A_k)+\frac{\epsilon}{2^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\acute{a}rea\ (A_k)+\epsilon$$

como ϵ es arbitraria y tan pequeña como se quiera

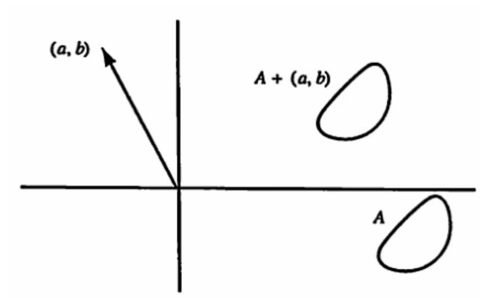
$$\acute{a}rea\ (A)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\acute{a}rea\ (A_k)$$

Área invariante bajo traslaciones

Si (a, b) es un punto en $\mathbb{R}^2$ y A es un conjunto contenido en $\mathbb{R}^2$, entonces el conjunto

$$A + (a, b) = \{(x + a, y + b)|(x, y) \in A\}$$

representa la traslación de A por el punto (a,b).



Entonces $[A+(a, b)]+(c, d) = A+[(a+c, b+d)]$ y para cualquier rectángulo Q, $Q+(a, b)$ es un rectángulo y como consecuencia $\|Q+(a, b)\| = \|Q\|$; de esto se puede concluir que el área es invariante bajo traslación, escribiendose de la siguiente forma

$$\acute{a}rea[A + (a, b)] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|Q_n + (a, b)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|Q_n\|$$

tomando $inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|Q_n\| \right\} = \acute{a}rea(A)$ se tiene que $\acute{a}rea[A+(a, b)] \leq \acute{a}rea(A)$ y de está última desigualdad sustituimos A por A+(a,b) y (a,b) por (-a,-b) obteniendo

$$\acute{a}rea[A + (a, b) + (-a, -b)] \leq \acute{a}rea(A + (a, b))$$

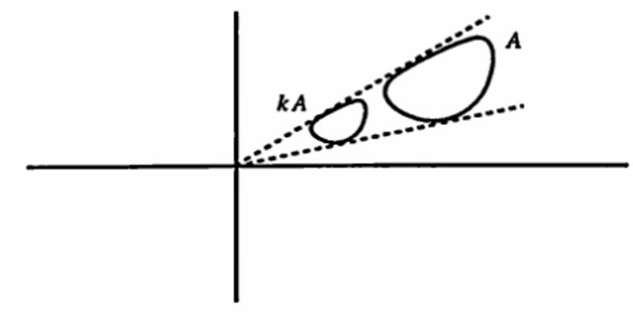
$\therefore$ $\acute{a}rea[A] \leq \acute{a}rea(A + (a, b))$ estableciendo la invarianza del área bajo la traslación

Área invariante bajo dilatacion

Sea $k > 0$ un número real y A es un conjunto contenido en $\mathbb{R}^2$, entonces el conjunto

$$kA) = \{(ka, kb)|(x, y) \in A\}$$

representa la dilatación de A por k.



Entonces $k(cA) = (kc)A$ para $k, c > 0$ y para cualquier rectángulo kQ, $\|kQ\| = k^2\|Q\|$ de esto se puede concluir que el área es invariante bajo dilatación, escribiendose de la siguiente forma

$$área(ka) = k^2 área(A)$$

en efecto pues si Q_n es una cubierta de rectángulos de A entonces kQ_n es también una cubierta de rectángulos de kA por lo que

$$área(kA) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|kQ_n\| = k^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Q_n\| \right)$$

tomando el ínfimo $inf \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Q_n\| \right)$ se tiene que $área(ka) \leq k^2 área(A)$ y de está última desigualdad sustituimos $\frac{1}{k}$ por k y A por kA obteniendo

$$área \left(\frac{1}{k} kA \right) \leq \frac{1}{k^2} área(kA) \Rightarrow k^2 área(A) \leq área(ka)$$

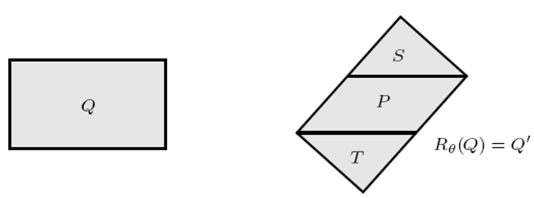
estableciendo la invarianza del área bajo la dilatación

Área invariante bajo rotación

Sea A un conjunto contenido en $\mathbb{R}^2$, entonces el conjunto A' es el conjunto obtenido de rotar A un cierto ángulo $< \dfrac{\pi}{2}$ vamos a probar que

$$área\ (A) = área\ (A')$$

Sea Q_n una cubierta rectangular de A, entonces para cada n se tiene Q'_n es el rectangulo rotado generado por Q_n y vamos a dividir Q'_n en dos triángulos y un paralelogramo



de tal menra que

$$\acute{a}rea\ (Q'_n) \leq \acute{a}rea\ (S) + \acute{a}rea\ (P) + \acute{a}rea\ (T) = \|S\| + \|P\| + \|T\| = \|Q_n\|$$

y de esta manera

$$\acute{a}rea\ (A') \leq \sum_{n=1}^{\infty} \acute{a}rea\ (Q'_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|Q_n\|$$

tomando ínfimos

$$\acute{a}rea\ (A') \leq \acute{a}rea\ (A)$$

si a esta última desigualdad aplicamos la rotación inversa que manda A' en A se obtiene

$$\acute{a}rea\ (A) \leq \acute{a}rea\ (A')$$

y por lo tanto

$$\acute{a}rea\ (A') = \acute{a}rea\ (A)$$