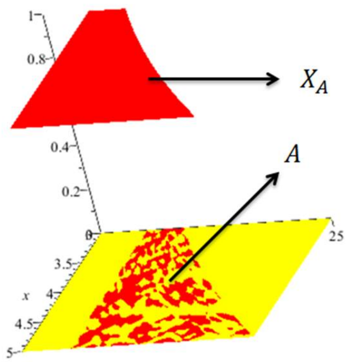
Medida de Jordan

Definición 1. *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, definimos $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la función característica de A, de la siguiente forma*

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \notin A \end{cases}$$



Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, decimos que A es Jordan Medible si la función característica de A es integrable sobre algún rectángulo R que contenga a A. En este caso decimos que la medida de Jordan de A (que denotaremos J(A)) esta dada por

$$J(A) = \int_R \chi_A$$

Ejemplo.- Sean a,b números positivos y

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \left(\frac{b}{a}x\right) \right\}$$

En este caso A es un triángulo de base a y altura b. Mostraremos que A es Jordan-Medible en $\mathbb{R}^2$, y que su medida es $\frac{ab}{2}$

Demostración. Tomemos el rectángulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} = [0,a] \times [0,b]$ el cual contiene a A. De acuerdo con nuestra definición tenemos que mostar que la función característica χ_A es integrable sobre R y que

$$\int_R \chi_A = \frac{ab}{2}$$

Sea $P_1\{\frac{ia}{n}|i = 1, ..., n\}$ y $P_2 = \{\frac{ib}{n}ß = 1, ..., n\}$ por tantp $P = P_1 \times P_2$ es una partición del rectángulo R, donde cada subrectángulo tiene medida $\frac{ab}{n^2}$.
Por lo que en este caso

$$\overline{S}(\chi_A, P) = \sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} = 2 \cdot \frac{ab}{n^2} + 3 \cdot \frac{ab}{n^2} + ... + n \cdot \frac{ab}{n^2} = \frac{ab}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) = \frac{ab}{2}\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\underline{S}(\chi_A, P) = \sum_{R_i \subset A \neq \emptyset} = 1 \cdot \frac{ab}{n^2} + 2 \cdot \frac{ab}{n^2} + ... + (n-1) \cdot \frac{ab}{n^2} = \frac{ab}{n^2}\left(\frac{(n-1)n}{2}\right) = \frac{ab}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$\therefore$

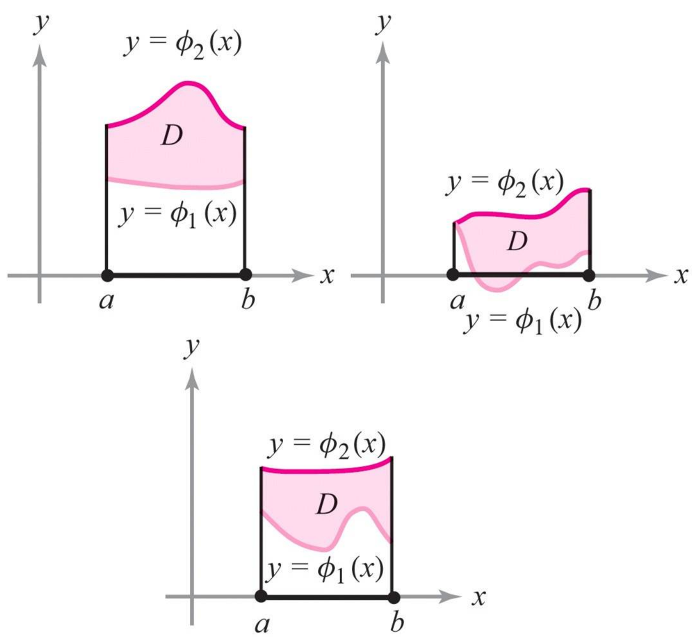
$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(\chi_A, P) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(\chi_A, P) = \frac{ab}{2}$$

$$J(A) = \int_R \chi_A = \frac{ab}{2}$$

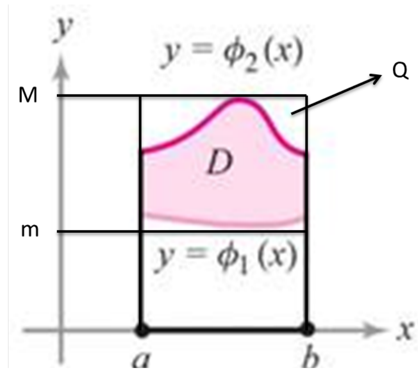
$\square$

Integrales dobles extendidas a regiones mas generales

Supongamos que se tienen dos funciones con valores reales $\phi_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisfacen $\phi_1 \leq \phi_2$ $\forall x \in [a, b]$. En este caso se dice que el conjunto D es una región Tipo I

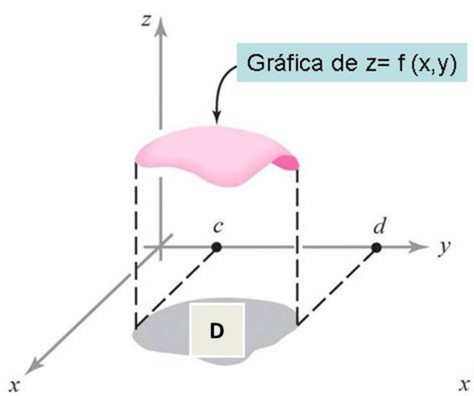


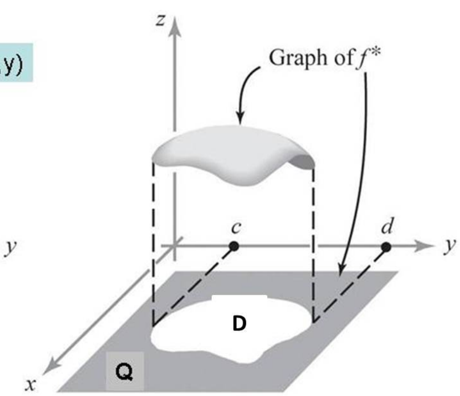
- Sea D una región acotada, e incluyamos D en un rectangulo Q
- Sea f una función definida y acotada en D.
- Sea $Q = [a, b] \times [m, M]$ donde m=min f sobre D y M=max f sobre D



Definamos una nueva función $\overline{f}$ en Q

$$\overline{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si \quad (x,y) \in D \\ 0 & si \quad (x,y) \in Q - D \end{cases}$$





Si f es integrable sobre Q , decimos que f es integrable en D y que por definición $\int_D f = \int_Q \overline{f}$

Teorema 1. *Sea D una región tipo I. Supongamos que f esta definida y es acotada en D que es continua en el interior de D. Existe la integral*

$$\int_D f$$

y puede calcularse por integración reiterada

$$\int\int_D f = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx$$

Demostración. Sea $Q = [a,b] \times [m.M]$ un rectángulo que contiene a D y sea

$$\overline{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si \quad (x,y) \in S \\ 0 & si \quad (x,y) \in Q - S \end{cases}$$

los únicos puntos donde hay discontinuidad para $\overline{f}$ son los de la frontera de D, puesto que $fr(D)$ tiene contenido nulo, $\overline{f}$ es integrable en Q.

Para x fijo $\exists \displaystyle\int_c^d \overline{f}(x,y)dy$ aplicando integración iterada

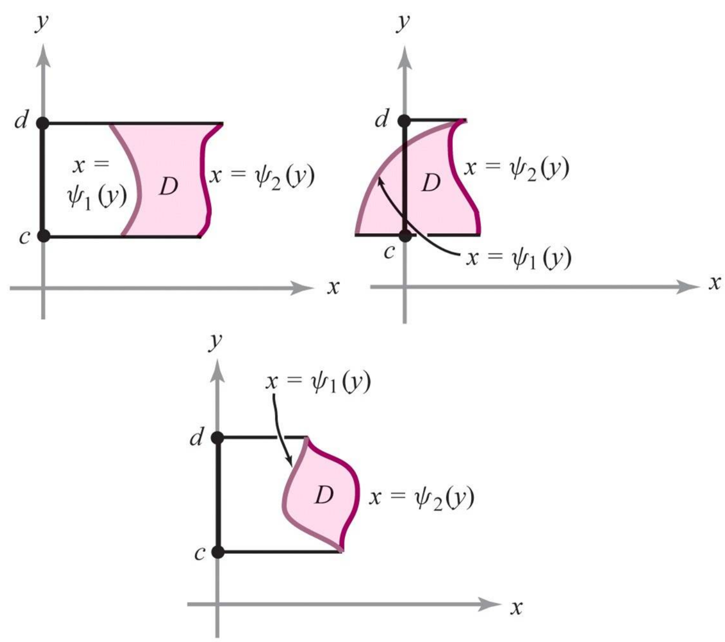
$$\int\int_Q f = \int_a^b \int_c^d \overline{f}(x,y)dydx \quad si \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \quad \overline{f}(x,y) = f(x,y)$$

y para todos los demas valores de y en $[c,d]$ $f(x,y) = 0$

$$\therefore \int_c^d \overline{f}(x,y)dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \overline{f}(x,y)dy \qquad \therefore \int\int_Q f = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dydx$$

$\square$

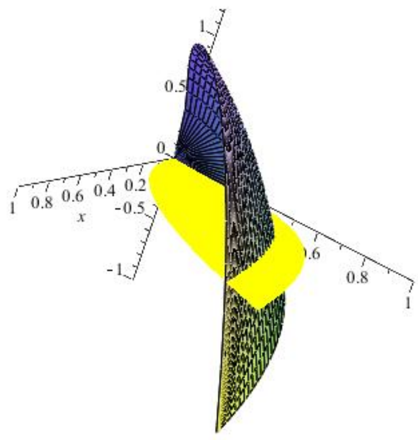
Analogamente Supongamos que se tienen dos funciones con valores reales $\psi_1 : [c,d] \to \mathbb{R}$ y $\psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ que satisfacen $\psi_1 \leq \psi_2$ $\forall y \in [c,d]$. En este caso se dice que el conjunto D es una región Tipo II



Analogamente, si consideramos una región $T = \{(x,y) | c \leq y \leq d \ y \ \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\}$ con φ_1 y φ_2 funciones continuas en $[c,d]$ siendo $\varphi_1 \leq \varphi_2$ tenemos que $\displaystyle\int\int_T f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dxdy$

Ejemplo Calcular la integral sobre el conjunto que se indica

$$f(x,y) = 2\sqrt{x} - 3y^2 \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq \sqrt[4]{x}\}$$



Solución Tenemos que

$$\int_D f = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt[4]{x}} (2\sqrt{x} - 3y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left((2\sqrt{x}y - y^3) \,\Big|_0^1 \right) dx = \int_0^1 (x^{\frac{3}{4}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^6) dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{7} x^{\frac{7}{2}} + \frac{x_7}{7} \,\Big|_0^1 = \frac{1}{7}$$

Existen regiones que se pueden ver como regiones tipi I y tipo II y en tal caso, se puede calcular la integral intercambiando el orden de integración

Ejemplo: Dibujar la región de integración y calcular la integral doble, luego intercambiar el orden de integración.

$$\int \int_R f(x,y) dA \quad donde \quad f(x,y) = e^{x+y} \quad y \quad R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x| + |y| \leq 1\}$$

tenemos que trabajar R por casos para identificar la región de integración

Tenemos entonces que

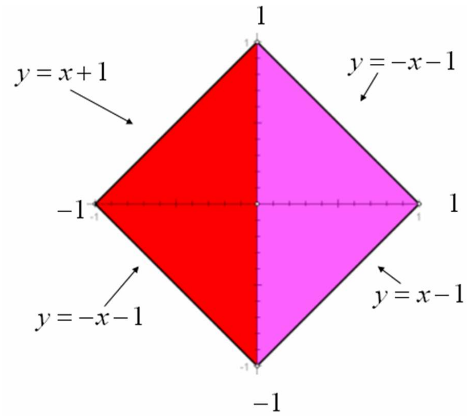
$$x > 0, \quad y > 0 \Rightarrow |x| + |y| \leq 1 \Rightarrow x + y \leq 1$$

$$x < 0, \quad y > 0 \Rightarrow |x| + |y| \leq 1 \Rightarrow -x + y \leq 1$$

$$x > 0, \quad y < 0 \Rightarrow |x| + |y| \leq 1 \Rightarrow x - y \leq 1$$

$$x < 0, \quad y < 0 \Rightarrow |x| + |y| \leq 1 \Rightarrow -x - y \leq 1$$

Lo anterior se muestra en la figura siguiente



$\therefore$ Para la región roja

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{-1}^{0}\int_{-1-x}^{x+1} e^{x+y}dydx = \int_{-1}^{0} e^{x+y}\left.\right|_{-x-1}^{x+1} = \int_{-1}^{0} e^{x+x+1} - e^{x-x-1}dx = \int_{-1}^{0} e^{2x+1} - e^{-1}dx$$

$$= \frac{e^{2x+1}}{2} - e^{-1}x\left.\right|_{-1}^{0} = \frac{e}{2} - \left(\frac{e^{-1}}{2} + e^{-1}\right) = \frac{e}{2} - \frac{3e^{-1}}{2}$$

$\therefore$ Para la región rosa

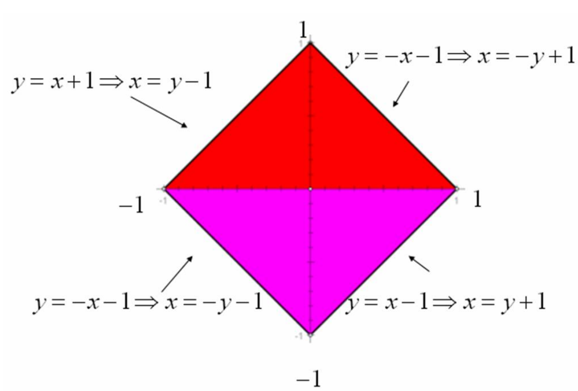
$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{-x+1} e^{x+y}dydx = \int_{0}^{1} e^{x+y}\left.\right|_{x-1}^{-x+1} = \int_{0}^{1} e^{x-x+1} - e^{x+x-1}dx = \int_{0}^{1} e - e^{2x-1}dx$$

$$= ex - \frac{e^{2x-1}}{2}\left.\right|_{0}^{1} = e - \frac{e}{2} - \left(-\frac{e^{-1}}{2}\right) = \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2}$$

$\therefore$ sumando ambos resultados obtenemos

$$\frac{e}{2} - \frac{3e^{-1}}{2} + \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} = e - e^{-1}$$

Vamos ahora a intercambiar el orden de integración



$\therefore$ Para la región roja

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_0^1 \int_{y-1}^{-y+1} e^{x+y}dxdy = \int_0^1 e^{x+y}\Big|_{y-1}^{-y+1} dy = \int_0^1 e^{-y+1+y} - e^{y-1+y}dy = \int_0^1 e - e^{2y-1}dy$$

$$= ey - \frac{e^{2y-1}}{2}\Big|_0^1 = e - \frac{e}{2} - \left(-\frac{e^{-1}}{2}\right) = \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2}$$

$\therefore$ Para la región rosa

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_{-1}^0 \int_{-y-1}^{y+1} e^{x+y}dxdy = \int_{-1}^0 e^{x+y}\Big|_{-y-1}^{y+1} dy = \int_{-1}^0 e^{y+1+y} - e^{-y-1+y}dy = \int_{-1}^0 e^{2y+1} - e^{-1}dy$$

$$= \frac{e^{2y+1}}{2} - ey\Big|_{-1}^0 = \frac{e}{2} - \left(\frac{e^{-1}}{2} + e^{-1}\right) = \frac{e}{2} - \frac{3e^{-1}}{2}$$

$\therefore$ sumando ambos resultados obtenemos

$$\frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} + \frac{e}{2} - \frac{3e^{-1}}{2} = e - e^{-1}$$