Campos Vectoriales

Definición 1. *Un campo vectorial en el plano* $\mathbb{R}^2$ *es una función* $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *que asigna a cada vector* $\overline{x} \in D \subset \mathbb{R}^2$ *un único vector* $F(\overline{x}) \in \mathbb{R}^2$ *con*

$$F(\overline{x}) = P(\overline{x})i + Q(\overline{x})j$$

en donde P, Q *son funciones escalares de dos variables*

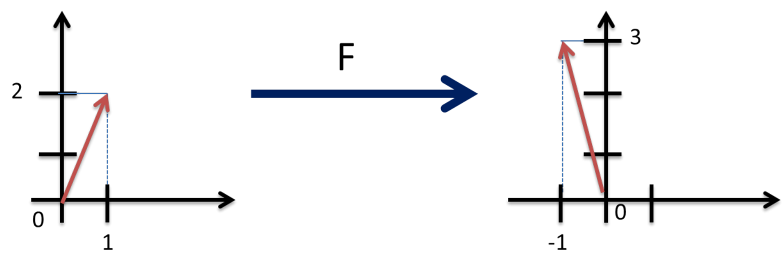
Definición 2. *Un campo vectorial en el espacio tridimensional* $\mathbb{R}^3$ *es una función* $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *que asigna a cada vector* $\overline{x} \in D \subset \mathbb{R}^3$ *un único vector* $F(\overline{x}) \in \mathbb{R}^3$ *con*

$$F(\overline{x}) = P(\overline{x})i + Q(\overline{x})j + R(\overline{x})k$$

en donde P, Q *y* R *son funciones escalares de tres variables*

Ejemplo Describir algunos de los vectores del campo vectorial $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $F(x,y) = (x-y, x+y)$

Solución La función F transforma puntos del plano en puntos del plano



Cada vector (x,y) y su imagen forman un ángulo θ que podemos determinar

$$\cos\theta = \frac{F(x,y)\cdot(x,y)}{\|F(x,y)\|\cdot\|(x,y)\|} = \frac{(x-y,x+y)\cdot(x,y)}{\|(x-y,x+y)\|\cdot\|(x,y)\|} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{2}(x^2+y^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

por tanto

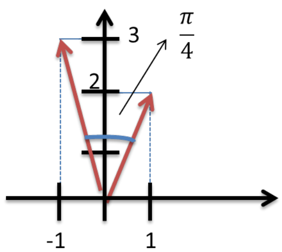
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{4}$$

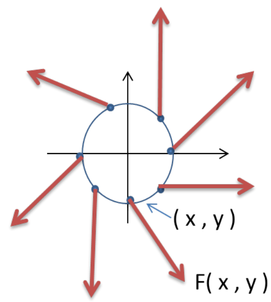
ahora bien

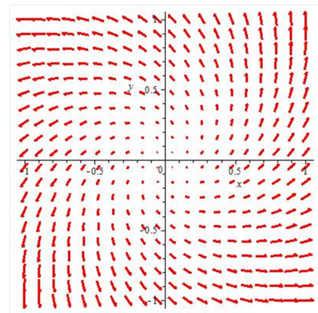
$$\|F(x,y)\| = \sqrt{2}(x^2+y^2) = \sqrt{2}\|(x,y)\|$$

Asi, la función F gira cada vector (x,y) del plano un ángulo $\frac{\pi}{4}$ radianes y luego aumenta su tamaño $\sqrt{2}$ veces

Se representa un campo vectorial dibujando el vector $F(x, y)$ anclado en el punto (x, y), o sea, la imagen $F(x, y)$ se dibuja conservando su magnitud y dirección anclada en su correspondiente preimagen (x, y)



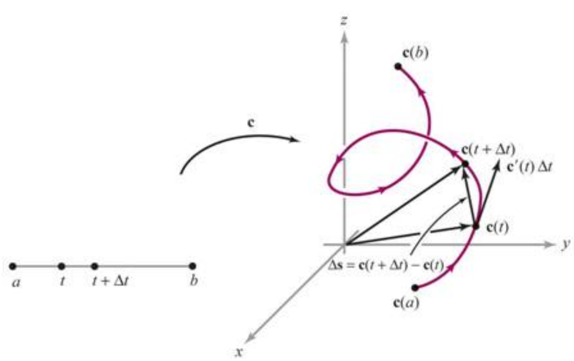




Integral de linea (Campos vectoriales)

Si $F = P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ es un campo de fuerza en el espacio (que puede ser electrico o gravitacional) continuo a lo largo de una trayectoria $C : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ que tiene primera derivada continua en el intervalo $[a, b]$ sobre la cual una partícula se mueve a mientras actua sobre ella una fuerza F.
Sea $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ Si C es un desplazamiento en linea recta dado por el vector d y F es una fuerza constante, entonces el trabajo realizado por F al mover la partícula a lo largo de la trayectoria es $F \cdot d$

$F \cdot d =$ magnitud de la fuerza por desplazamiento , entonces



$c(t + \Delta t) - c(t)$ es el desplazamiento

$$\frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t} = c'(t)$$

teorema del valor medio

$\therefore c(t + \Delta t) - c(t) = c'(t)\Delta t$

$\therefore$ el trabajo relaizado para ir de $c(t)$ a $c(t + \Delta t)$

$T = F(c(t)) \cdot \Delta s \approx F(c(t)) \cdot c'(t)\Delta t$

entonces el trabajo realizado es

$$T \approx \sum F(c(t_i)) \cdot \Delta s = \sum F(c(t_i)) \cdot c'(t)\Delta t$$

y cuando $n \to \infty$ tenemos que

$$T = \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t)dt$$

Ejemplo Calcular el trabajo realizado por la fuerza $F(x, y) = xy\hat{i} + seny\hat{j}$ y cuando el punto de aplicación de esta recorre el arco de parábola $y = x^2$ cuando recorre el segmento de la recta $y = x$ entre los puntos de corte entre ambas curvas.

Solución Los puntos de corte son $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Una parametrización de la parábola $y = x^2$ es $c(t) = (t, t^2),\ t\epsilon[0, 1]$

$\therefore F(c(t)) = F(t, t^2) = (t^3, sent^2) \therefore c'(t) =)(1, 2t)$

$\therefore \displaystyle\int_0^1 (t^3, sent^2) \cdot (1, 2t)dt = \int_0^1 t^3 + 2tsent^2 dt = \frac{t^4}{4} - cost^2\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{4} - cos(1) - (0 - 1) = \frac{1}{4} - cos(1) + 1 = \frac{5}{4} - cos(1)$

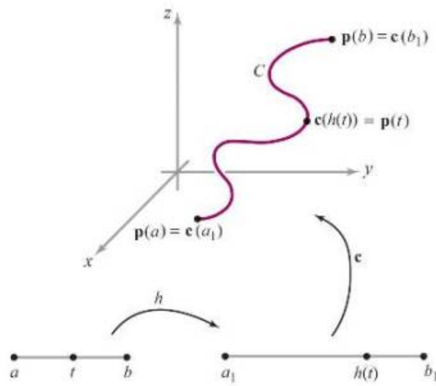
Para el segundo trabajo

Una parametrización es $c(t) = (t, t),\ t\epsilon[0, 1] \therefore F(c(t)) = (t^2, sent)$ y $c'(t) = (1, 1)$

$\therefore \displaystyle\int_0^1 (t^2, sent) \cdot (1, 1)dt = \int_0^1 t^2 + sentdt = \frac{t^3}{3} - cost\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - cos(1) - [0 - 1] = \frac{4}{3} - cos(1).$

$\therefore$ El valor de la integral curvilinea ha variado al cambiar la curva.

Teorema 1. *Cambio de Parametrización para integrales de línea. Sea F un campo vectorial continuo en la trayectoria $c : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 y sea $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de C.*



Si ρ conserva la orientación, entonces
$\displaystyle\int_c F \cdot ds = \int_\rho F \cdot dt$

Demostración. Por hipótesis, tenemos la aplicación h tal que $\rho = c \circ h$.
Por la regla de la cadena $\rho' = c'(h(t)) \cdot h'(t)$ de modo que
$\displaystyle\int_\rho F \cdot ds = \int_a^b [F(c(h(t))] \cdot h'(t)dt$
Cambiando variable $s = h(t)$ se convierte en
$\displaystyle\int_{h(a)}^{h(b)} F(c(s)) \cdot c'(s)ds = \int_{a_1}^{b_1} F(c(s)) \cdot c'(s)ds = \int_c F \cdot ds.$ □

Teorema 2. *Si en $\displaystyle\int_\gamma F \cdot ds$ γ esta parametrizada por $g(t)$ para $a \le t \le b$ podemos denotar γ^- la curva parametrizada por $g^-(t) = g(a+b-t)$ para $a \le t \le b$. Es claro que γ^- como conjunto, es igual a γ, pero invierte la orientación es decir de $g(b)$ a $g(a)$. Entonces*

$$\int_{\gamma^-} F \cdot ds = -\int_\gamma F \cdot ds$$

Demostración. Como $g^-(t) = g(a+b-t) \Rightarrow (g^-)'(t) = -g'(a+b-t)$ se tiene que

$$\int_{\gamma^-} F \cdot ds = -\int_a^b F(g(a+b-t)) \cdot g'(a+b-t)dt \underbrace{=}_{\substack{s=a+b-t \\ t=a \Rightarrow s=b \quad t=b \Rightarrow s=a}} -\int_b^a F(g(s)) \cdot g'(s)(-1)ds$$

$$-\int_a^b F(g(s)) \cdot g'(s)ds = -\int_\gamma F \cdot ds$$

□

Gradiente de un Campo Escalar

Definición 3. *Consideremos una función* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definida en* U*. Sea* $x \in U$ *y supongamos que en dicho punto existen todas las derivadas parciales* $\dfrac{\partial f}{x_i}$ $i = 1, ..., n$*.*
Se define el gradiente de f *en el punto* x *como el vector*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{x_1}, \frac{\partial f}{x_2}, ..., \frac{\partial f}{x_n} \right)$$

Si f *es una función escalar de clase* c^1 *definida en un abierto* U*, el gradiente es un campo vectorial continuo*

Teorema 3. *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de clase* c^1 *y* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *una trayectoria de clase* c^1*. Entonces*

$$\int_\alpha \nabla f = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

Demostración. Consideremos la función $g(t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = (f \circ \alpha)(t) = f(\alpha(t))$ que es de clase c^1 por se composición de funciones de clase c^1. Aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$g'(t) = (f \circ \alpha)'(t) = (f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), ..., \alpha_n(t))' = \frac{\partial f(\alpha(t))}{x_1}\alpha_1'(t) + \frac{\partial f(\alpha(t))}{x_2}\alpha_2'(t) + ... + \frac{\partial f(\alpha(t))}{x_n}\alpha_n'(t) =$$

$$\nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)$$

por lo tanto

$$\int_\alpha \nabla f = \int_a^b \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a))$$

□