Derivación bajo el signo de integral

Teorema 1. *Teorema de Leibniz Sea $f:[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función continua y sean $\alpha,\beta:[c,d]\to\mathbb{R}$ funciones derivables tales que*

$$a\leq\alpha(y)\leq x\leq\beta(y)\leq b\quad\forall\quad y\in[c,d]$$

supongamos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua en el conjunto

$$T=\{(x,y)\mathbb{R}^2\mid\alpha(y)\leq x\leq\beta(y),\quad y\in[c,d]\}$$

entonces

$$F(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)\;dx$$

existe es derivable $\forall\ y\in[c,d]$ y

$$F'(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\;dx+f(\beta(y),y)\beta'(y)+f(\alpha(y),y)\alpha'(y)$$

Demostración. Sea $y_0\in[c,d]$ entonces podemos escribir

$$F(y)=\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)}f(x,y)\;dx=\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)}f(x,y)\;dx+\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)}f(x,y)\;dx+\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)}f(x,y)\;dx$$

hacemos el cociente

$$\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{y-y_0}\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)}f(x,y)\;dx+\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)}\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\;dx+\frac{1}{y-y_0}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)}f(x,y)\;dx$$

tenemos que

$$\frac{1}{y-y_0}\int_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)}f(x,y)\;dx=\frac{\alpha(y_0)-\alpha(y)}{y-y_0}f(\overline{x},y)\qquad\overline{x}\in[\alpha(y),\alpha(y_0)]\underbrace{=}_{y\to y_0}\alpha'(y_0)(f(\alpha(y_0)),y_0)$$

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)}\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\;dx\underbrace{=}_{y\to y_0}\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$$

$$\frac{1}{y-y_0}\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)}f(x,y)\;dx=\frac{\beta(y_0)-\beta(y)}{y-y_0}f(\overline{x},y)\qquad\overline{x}\in[\beta(y),\beta(y_0)]\underbrace{=}_{y\to y_0}\beta'(y_0)(f(\beta(y_0)),y_0)$$

al sumar lo anterior se obtiene el resultado

Ejemplo A partir del resultado

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4a}$$

calcular las siguientes integrales

$$a)\quad \int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} \qquad b)\quad \int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$$

Solución Para el inciso a se tiene derivando la integral según la regla de Leibniz

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4a}\right) \Rightarrow \int_0^a \frac{-2a}{(x^2+a^2)^2}\,dx + \frac{1}{2a^2} = -\frac{\pi}{4a^2} \Rightarrow \int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{2+\pi}{8a^3}$$

Para el inciso b se tiene al derivar lo anterior

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2+\pi}{8a^3}\right) \Rightarrow \int_0^a \frac{-4a}{(x^2+a^2)^3}\,dx + \frac{1}{4a^2} = -\frac{3(2+\pi)}{8a^4} \Rightarrow \int_0^a \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{8+3\pi}{32a^5}$$

□

Teorema 2. *Sean $F(x,y)$ y $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ continuas en $\{a \le x \le b, \alpha \le y \le \beta\}$ donde $\beta = \infty$. Supóngase que $\exists\ x_0$ en [a,b] para el cual*

$$\int_\alpha^\beta F(x_0,y)dy$$

converge uniformemente en [a,b]. Si se denota por $f(x)$ a este valor, entonces f es diferenciable y

$$f'(x)dx = \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x}F(x,y)dy$$

Demostración. Sea

$$g(x) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x}F(x,y)dy$$

por tanto tenemos que

$$\int_{x_0}^x g(t)dt = \int_\alpha^\beta dy\int_{x_0}^x \frac{\partial}{\partial t}F(t,y)dy = \int_\alpha^\beta F(x,y)-F(x_0,y)dy = \int_\alpha^\beta F(x,y)dy - \int_\alpha^\beta F(x_0,y)dy =$$

$$f(x)-f(x_0)$$

y derivando de ambos lados se tiene

$$g(x) = f'(x)$$

ahora bien como

$$\int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial t}F(t,y)dy$$

converge uniformemente $\exists\ \eta(\epsilon)$ tal que $\forall \eta, \beta > \eta(\epsilon)$ se tiene

$$\left|\int_{\eta}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} F(t,y)dy\right| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

$\therefore$

$$\left|\int_{\eta}^{\beta} F(x,y)dy\right| = \left|\int_{\eta}^{\beta}\int_{x_0}^{x} \frac{\partial F(t,y)}{\partial t}dt + F(x_0,y)dy\right| \leq \left|\int_{\eta}^{\beta} dy \int_{x_0}^{x} \frac{\partial F(t,y)}{\partial t}dt\right| + \left|\int_{\eta}^{\beta} F(x_0,y)dy\right|$$

$$= \left|\int_{x_0}^{x} dt \int_{\eta}^{\beta} \frac{\partial F(t,y)}{\partial t}dy\right| + \frac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b \left|\int_{\eta}^{\beta} \frac{\partial F(t,y)}{\partial t}dy\right| dt + \frac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{2(b-a)} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\square$

Ejemplo.- Evaluar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

tenemos que en este caso hacemos un cambio de coordenadas polares $x = r\cdot\cos(\theta)$, $y = r\cdot\operatorname{sen}(\theta)$ donde $0 \leq r \leq n$ y $0 \leq \theta \leq 2\cdot\pi$ por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{n} e^{-r^2}rdrd\theta = \lim_{n\to\infty} 2\pi\int_0^{n} e^{-r^2}rdrd\theta = -\lim_{n\to\infty}\pi\left(1-e^{-n^2}\right) = \pi$$

Por otro lado

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right]^2$$

$\therefore$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right]^2 = \pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \quad e^{-x^2} \quad es \quad par \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Usaremos lo anterior para evaluar la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$$

Tenemos que

$$\left|e^{-t^2}\cos(xt)\right| \leq e^{-t^2} \quad \therefore \int_0^{\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt \quad converge$$

Derivando bajo el signo de integral tenemos

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt = \int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-t^2}\cos(xt)\right)dt = -\int_0^{\infty} te^{-t^2}\operatorname{sen}(xt)dt$$

$$\underbrace{=}_{u=\operatorname{sen}(xt) \quad du=x\cos(xt)dt \quad dv=te^{-t^2} \quad v=\frac{-e^{-t^2}}{2}} -\left(\frac{-e^{-t^2}}{2}\cdot\operatorname{sen}(xt)\,|_0^{\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{-e^{-t^2}}{2}\cdot x\cos(xt)dt\right) =$$

$$-\frac{x}{2}\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(xt)dt \Rightarrow f'(x) = -\frac{x}{2}f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{x}{2} \Rightarrow \log(f(x)) = -\frac{x^2}{4} + C_0 \Rightarrow f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{4}}$$

como

$$f(0) = \int_0^\infty e^{-t^2}\cos(0t)dt = \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

entonces

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$$