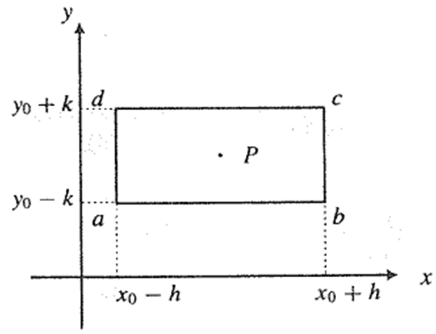
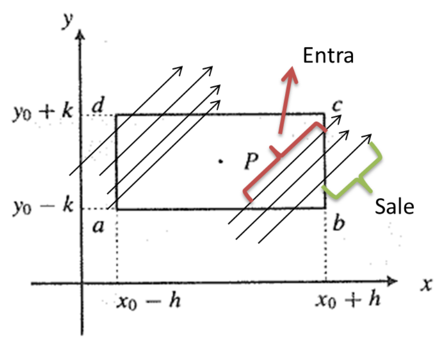
Divergencia de un Campo Vectorial

Supongamos que el campo $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $F = (M, N)$ definido en el abierto U de $\mathbb{R}^2$ es el campo de velocidades de una corriente de un fluido. Estamos interesados en estimar cuánto fluido pasa por una "pequeña"porción de U. Sea $p = (x_0.y_0) \in\ U$ y consideremos el rectángulo R con centro en p dado por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0 - h \leq x \leq x_0 + h,\ y_0 - k \leq y \leq y_0 + k\}$$



Tomando a h y a k suficientemente pequeños podemos asegurar que $R \subset U$.
Una estimación de cuanto fluido pasa a través del rectángulo R la podemos obtener sumando lo que pasa por los lados ab y ad, y los lados cd y bc.



Hagamos el cálculo de la cantidad de fluido que pasa por el lado ab
Lo que entra al lado ab

$$F(x_0, y_0 - k) \cdot (-\hat{j})\ 2h = (M(x_0, y_0 - k), N(x_0, y_0 - k)) \cdot (0, -1)\ 2h = -2hN(x_0, y_0 - k)$$

analogamentre Lo que entra al lado ad

$$F(x_0 - h, y_0) \cdot (-\hat{\imath})2k = -2kM(x_0 - h, y_0)$$

Lo que entra al lado dc

$$F(x_0, y_0 + k) \cdot (\hat{j})2h = 2hN(x_0, y_0 + k)$$

Lo que entra al lado cb

$$F(x_0+h,y_0)\cdot(\hat{i})2k = 2kM(x_0+h,y_0)$$

Entonces la cantidad de fluido que pasa a través del rectángulo R es aproximadamente

$$-2hN(x_0,y_0-k)-2kM(x_0-h,y_0)+2hN(x_0,y_0+k)+2kM(x_0+h,y_0)=$$

$$2kM(x_0+h,y_0)-2kM(x_0-h,y_0)+2hN(x_0,y_0+k)-2hN(x_0,y_0-k)=$$
$$2k(M(x_0+h,y_0)-M(x_0-h,y_0))+2h(N(x_0,y_0+k)-N(x_0,y_0-k))$$

Dividiendo esta expresión entre el área encerrada por el rectángulo R (igual a 4 hk), obtenemos una medida de la cantidad de fluido que pasa por R por unidad de área. Ésta es entonces

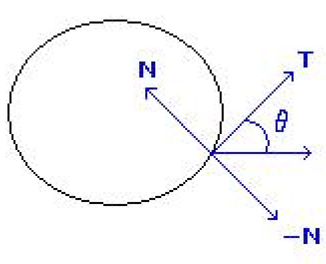
$$\frac{M(x_0+h,y_0)-M(x_0-h,y_0)}{2h}+\frac{N(x_0,y_0+k)-N(x_0,y_0-k)}{2k}$$

haciendo que h, k tiendan a cero, obtenemos información sobre cuánto fluido pasa por el punto p por unidad de área

$$\lim_{h,k\to 0}\left(\frac{M(x_0+h,y_0)-M(x_0-h,y_0)}{2h}+\frac{N(x_0,y_0+k)-N(x_0,y_0-k)}{2k}\right)=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{M(x_0+h,y_0)-M(x_0-h,y_0)}{2h}+\lim_{k\to 0}\frac{N(x_0,y_0+k)-N(x_0,y_0-k)}{2k}=$$
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0}\frac{M(x_0+h,y_0)-M(x_0-h,y_0)}{h}\right)+\frac{1}{2}\left(\lim_{k\to 0}\frac{N(x_0,y_0+k)-N(x_0,y_0-k)}{2k}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{h\to 0}\frac{M(x_0+h,y_0)-M(x_0,y_0)+M(x_0,y_0)-M(x_0-h,y_0)}{h}\right)+$$
$$\frac{1}{2}\left(\lim_{k\to 0}\frac{N(x_0,y_0+k)-N(x_0,y_0)+N(x_0,y_0)-N(x_0,y_0-k)}{2k}\right)=$$
$$\frac{\partial M}{\partial x}(p)+\frac{\partial N}{\partial x}(p)$$

Teorema de la Divergencia en el Plano



Sea $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ una curva cerrada en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t)=x(t)\hat{\imath}+y(t)\hat{\jmath}$$
$$\therefore\ \alpha'(t)=x'(t)\hat{\imath}+y'(t)\hat{\jmath}$$

Y el vector normal se puede escribir como

$$y'(t)\hat{\imath}-x'(t)\hat{\jmath}=N(t)$$

Entonces dado el campo $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ como $F(x,y)=M\hat{\imath}+N\hat{\jmath}$ se le aplica el teorema de Green para obtener

$$\int_{Fr(D)} F=\int_a^b F(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)\,dt=\int_a^b F(x(t),y(t))\cdot(y'(t),-x'(t))dt=\int_a^b M(x(t),y(t))(y'(t))-N(x(t),y(t))(x'(t))\,dt$$

$$\int_a^b\left(M(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}-N(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}\right)\,dt=\int_a^b M\ dy-N\ dx=\int_a^b -N\ dx+M\ dy=$$

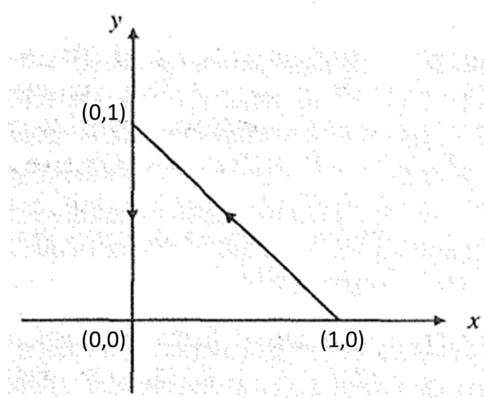
aplicando el teorema de Green

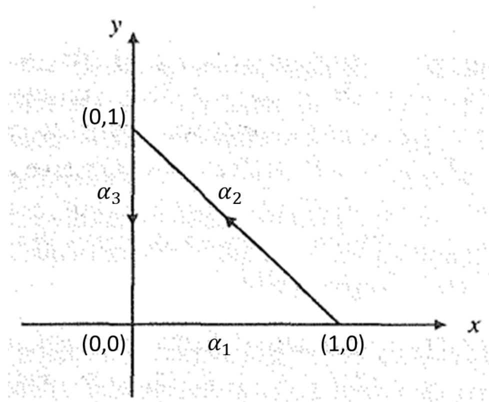
$$=\int\int_D\left(\frac{\partial M}{\partial x}-\left(-\frac{\partial N}{\partial y}\right)\right)dxdy=\int\int_D\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dxdy=\int\int_D div\ F\ dxdy$$

La generalización de esta forma a tres dimensiones se llama Teorema de la divergencial (Gauss).

Ejemplo Verificaremos el teorema de la divergencia con el campo $F(x,y)=(-x,-y)$ y sea

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x+y\le 1,\ y\ge 0\ x\ge 0\}$$





una parametrización de la frontera sería

$$\alpha_1:[0,1]\to\mathbb{R}^2\ \ dada\ \ por\ \ \alpha_1(t)=(t,0)$$

$$\alpha_2:[0,1]\to\mathbb{R}^2\ \ dada\ \ por\ \ \alpha_1(t)=(1-t,t)$$

$$\alpha_1:[0,1]\to\mathbb{R}^2\ \ dada\ \ por\ \ \alpha_1(t)=(0,1-t)$$

por lo tanto

$$\int_\alpha F=\int_{\alpha_1}F+\int_{\alpha_2}F+\int_{\alpha_3}F$$

en este caso se tiene que

$$\int_{\alpha_1} F = \int_0^1 F(t,0)\cdot(0,-1)\ dt = \int_0^1 (-t,0)\cdot(0,-1)\ dt = 0$$

$$\int_{\alpha_2} F = \int_0^1 F(1-t,t)\cdot(1,1)\ dt = \int_0^1 F(t-1,-t)\cdot(1,-1)\ dt = \int_0^1 -1\ dt = -1$$

$$\int_{\alpha_3} F = \int_0^1 F(0,1-t)\cdot(-1,0)\ dt = \int_0^1 (0,t-1)\cdot(-1,0)\ dt = 0$$

por lo tanto el flujo a través de D será

$$\int_{Fr(D)} F = \int_{\alpha_1} F + \int_{\alpha_2} F + \int_{\alpha_3} F = -1$$

El signo $(-)$ significa que el flujo es hacia el interior de D
Por otro lado

$$div\ F = \ div\ (-x,-y) = \frac{\partial(-x)}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -2$$

entonces

$$\int\int_D div\ F\ dxdx = \int\int_D -2\ dxdy = -2\int\int_D dxdy = -1$$