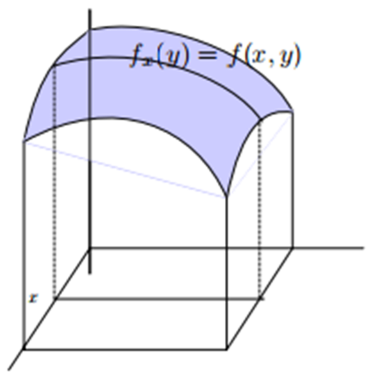
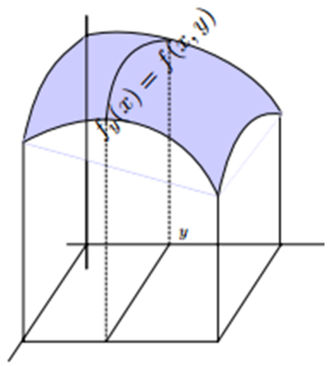
Teorema de Fubini

El teorema de Fubini nos va a dar una técnica para el cálculo de integrales de funciones de varias variables mediante el cálculo de varias integrales de funciones de una variable. A partir de ahí se podrán utilizar todas las técnicas conocidas del Análisis de una variable para el cálculo de integrales mediante cálculo de primitivas y el teorema fundamental del cálculo (Regla de Barrow): cambios de variables, integración por partes, etc Si R es un rectángulo en $\mathbb{R}^2$, podemos descomponerlo como producto cartesiano de dos intervalos, $R = A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathbb{R}$ y $A_2 \in \mathbb{R}$ $A = [a, b] \times [c, d]$
Los elementos de R los escribiremos como pares (x, y), $x \in A_1$, $y \in A_2$, y las funciones definidas en R como $z = f(x, y)$
Para cada $x \in A_1$ fijo, podemos considerar la función $f_x : A_2 \to R$ definida por $f_x(y) = f(x, y)$ donde x es una constante, y la variable es $y \in A_2$.



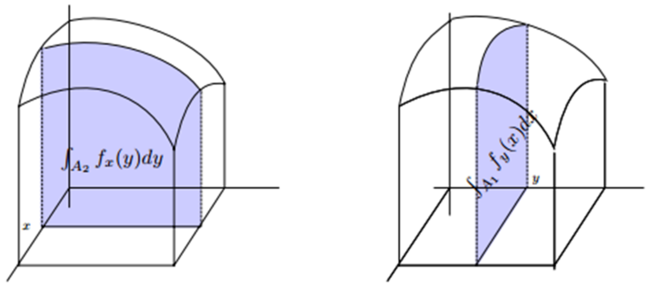
Y de igual manera, para cada $y \in A_2$ fijo,podemos considerar la función $f_y : A_1 \to \mathbb{R}$ definida por $f_y(x) = f(x, y)$ donde y es una constante y la variable es $x \in A_1$.



Si estas funciones son integrables, sus integrales se escribirán

$$\int_{A_1} f_y = \int_{A_1} f_y(x)dx = \int_{A_1} f(x, y)dx =$$

$$\int_{A_2} f_x = \int_{A_2} f_x(y)dy = \int_{A_2} f(x, y)dy =$$



Teorema 1. *Teorema de Fubini Sean $A_1 \subset \mathbb{R}$ y $A_2 \subset \mathbb{R}$ dos intervalos tal que, $R = A_1 \times A_2$, y f de R en $\mathbb{R}$ una función integrable. Entonces las funciones*

$$I(x) = \underline{\int}_{A_2} f(x,y)dy \qquad S(x) = \overline{\int}_{A_2} f(x,y)dy$$

son integrables sobre A_1, y además se verifica

$$\int_R f = \int_{A_1} I(x)dx = \int_{A_1} S(x)dx$$

Demostración. Observemos en primer lugar que una partición de $R = A_1 \times A_2$ esta formada por una partición de A_1 y otra de A_2,
Sea

$$P_1 \in P_{[a,b]} = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$$

y sea

$$P_2 \in P_{[c,d]} = \{c = r_0, r_1, ..., r_j = d\}$$

$$P = P_1 \times P_2 \in P_R$$

Y cualquier rectángulo de la partición P tiene área $|r_j - r_{j-1}||t_i - t_{i-1}|$, tenemos que

$$\underline{S}(f,P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}A(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}|r_j - r_{j-1}||t_i - t_{i-1}|$$

vamos a trabajar con

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}|r_j - r_{j-1}|$$

si $x_0 \in A_1$ es fijo se tiene entonces que

$$m_{ij} = \text{ínf}\{f(x_i, y_j) \mid x_i, y_j \in R_{ij}\} \leq m_{ij} = \text{ínf}\{f(x_0, y_j) \mid x_0, y_j \in R_{ij}\} = m_{x_0 j}$$

luego entonces

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}|r_j - r_{j-1}| \leq \sum_{j=1}^{m} m_{x_0 j}|r_j - r_{j-1}| = \underline{S}(f_{x_0}, P_2) \leq \underline{\int}_{A_2} f(x_0, y)dy$$

y esto para todo $x_0 \in A_1$, luego tomando ínfimos cuando $x_0 \in A_1$

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}|r_j - r_{j-1}| \leq m_{A_1}\left(\underline{\int}_{A_2} f(x_0, y)dy\right) = m_{A_1}(I)$$

por lo tanto

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}A(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}|r_j - r_{j-1}||t_i - t_{i-1}| \leq \sum_{i=1}^{n} m_{A_1}(I)|t_i - t_{i-1}| = \underline{S}(I, P_1)$$

por lo que

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(I, P_1)$$

con un proceso analogo obtenemos

$$\overline{S}(f, P_1) \leq \overline{S}(I, P)$$

tenemos las desigualdades

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(I, P_1) \leq \overline{S}(I, P_1) \leq \overline{S}(S, P_1) \leq \overline{S}(f, P)$$

como f es integrable, dado $\epsilon > 0$ para la partición P se tiene

$$\overline{S}(I, P_1) - \underline{S}(I, P_1) \leq \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \epsilon$$

por lo tanto I es integrable en A_1
Se tiene también que

$$\underline{S}(f, P) \leq \underline{S}(I, P_1) \leq \underline{\int}_{A_1} I \leq \overline{\int}_{A_1} I \leq \overline{S}(I, P_1) \leq \overline{S}(f, p)$$

para toda partición P de R, luego

$$\int_R f = \int_{A_1} I(x)dx = \int_{A_1}\left(\underline{\int}_{A_2} f(x, y)dy\right)dx = \int_a^b \left(\underline{\int}_{A_2} f(x, y)dy\right)dx$$

$$\int_R f = \int_{A_1} S(x)dx = \int_{A_1}\left(\overline{\int}_{A_2} f(x, y)dy\right)dx = \int_a^b \left(\overline{\int}_{A_2} f(x, y)dy\right)dx$$

Intercambiando los papeles de x, y en el desarrollo anterior podemos decir
Si f es una función integrable en un rectángulo $R = A_1 \times A_2$ las funciones

$$I(y) = \underline{\int}_{A_1} f(x, y)dx \qquad S(y) = \overline{\int}_{A_1} f(x, y)dx$$

son integrables sobre A_2 y además

$$\int_R f = \int_{A_2} I(y)dy = \int_{A_2} S(y)dy$$

Si f es continua en A_1 cada una de las funciones en $f_x : A_2 \to \mathbb{R}$ es también continua, y por tanto integrable, asi que

$$I(x) = \underline{\int}_{A_2} f(x,y)dy = \overline{\int}_{A_2} f(x,y)dy = S(x)$$

por lo que

$$\int_R f = \int_{A_1} \left(\int_{A_2} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

Analogamente si f es continua en A_2 cada una de las funciones en $f_y : A_1 \to \mathbb{R}$ es también continua, y por tanto integrable, asi que

$$\int_R f = \int_{A_{21}} \left(\int_{A_1} f(x,y)dx \right) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

$\square$

Ejemplo Si $R = [-1,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, calcular

$$\int_R (x\operatorname{sen}(y) - ye^x)dxdy$$

Solución Integrando primero respecto a x tenemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-1}^1 (x\operatorname{sen}(y) - ye^x)dx \right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-1}^1 \left(\frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(y) - ye^x \Big|_{-1}^1 \right) \right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-ey + \frac{y}{e} \right) dy$$

$$= \left(\frac{1}{e} - e \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\ dy = \left(\frac{1}{e} - e \right) \frac{\pi^2}{8}$$

en el otro orden de integración

$$\int_{-1}^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\operatorname{sen}(y) - ye^x)dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-x\cos(y) - \frac{y^2e^x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \right) dx = \int_{-1}^1 \left(-\frac{\pi e^x}{8} + x \right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{e} - e \right) \frac{\pi^2}{8}$$