Ejercicio Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo de clase c^k, $\quad k > 0$ definido en el conjunto abierto $U \in \mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1) *F es el campo gradiente de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase c^{k+1}*

2) *La integral $\int_\lambda F$ del campo F a lo largo de la trayectoria $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase c^1 tal que $\lambda[a,b] \subset U$, depende solamente del punto inicial $\lambda(a)$ y final $\lambda(b)$ de la trayectoria λ*

Demostrar que $2 \Rightarrow 1$

Demostración. Sea $P_0 \in U$ un punto fijo entonces para cada $p \in U$ consideramos la trayectoria $\gamma(t)$ para $t \in [a,b]$ con $\gamma(a) = p_0$ y $\gamma(b) = p$ y tal que γ esta totalmente contenida en U. Definimos

$$f(p) = \int_{p_0}^{p} F$$

vamos a demostrar que $\nabla f = F$ es decir $\dfrac{\partial f(p)}{\partial x_i} = F_i(p) \quad \forall\ i = 1, 2, ..., n$ tenemos que

$$\frac{\partial f(p)}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+he_i) - f(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_{p_0}^{p+he_i} F - \int_{p_0}^{p} F}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_{p_0}^{p+he_i} F + \int_{p}^{p_0} F}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_{p}^{p+he_i} F}{h}$$

Al considerar $\lambda(t) = p + \lambda h e_i \quad t \in [0,1]$ y se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_{p}^{p+he_i} F}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^1 F(p+\lambda h e_i) h e_i d\lambda}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^1 F_i(p+\lambda h e_i) h d\lambda}{h}$$

hacemos el cambio de variable $u = h\lambda$ de tal manera que si $\lambda = 0 \Rightarrow u = 0$ y $\lambda = 1 \Rightarrow u = h$ por lo tanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_0^1 F_i(p+\lambda h e_i) h d\lambda}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^h F_i(p+u e_i) du}{h}$$

si hacemos ahora

$$\varphi(s) = \int_0^s F_i(p+u e_i) du \quad \Rightarrow \quad \varphi'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_0^h F_i(p+u e_i) du}{h}$$

de manera que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_0^h F_i(p+u e_i) du}{h} = \frac{d}{ds}\left(\int_0^s F_i(p+u e_i) du\right)_{s=0} = F_i(p+s e_i)_{s=0} = F_i(p)$$

$\square$

La integral de linea de un campo vectorial $F = (F_1, F_2, F_3) \in \mathbb{R}^3$ a lo largo de una trayectoria $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ se suele escribir

$$\int_c F = \int_a^b F(c(t))\cdot c'(t) dt = \int_a^b F(x(t), y(t), z(t))\cdot(x'(t), y'(t), z'(t)) dt = \int_a^b (F_1 x'(t) + F_2 y'(t) + F_3 z'(t)) dt$$

y denotamos $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$ y $dz = z'(t)dt$

$$\int_a^b (F_1 x'(t) + F_2 y'(t) + F_3 z'(t)) dt = \int_a^b F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

Ejemplo Calcule

$$\int_{(0,0,0)}^{(3,-2,5)} 3xdx + y^3dy - z^2dz$$

Solución En este caso $F(x,y,z) = (3x, y^3, -z^2)$ y tenemos que

$$rot\ F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x & y^3 & -z^2 \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial(-z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(y^3)}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial(-z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(3x)}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial(y^3)}{\partial x} - \frac{\partial(3x)}{\partial y}\right) =$$

$$(0,0,0) \Rightarrow rot\ F = 0$$

por lo tanto F es conservativo y la integral no depende de la trayectoria que se tome para unir los puntos indicados.
Vamos a considerar entonces la trayectoria $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\lambda(t) = (3t, -2t, 5t) \quad t \in [0,1]$ y entonces

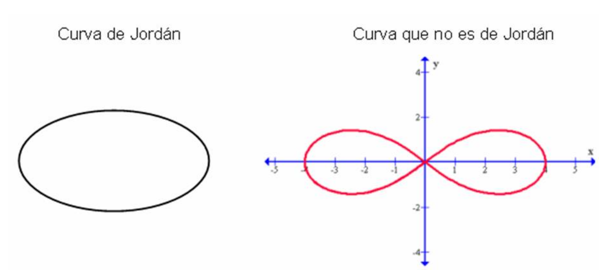
$$\int_{(0,0,0)}^{(3,-2,5)} 3xdx + y^3dy - z^2dz = \int_0^1 F(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)dt = \int_0^1 F(3t, -2t, 5t) \cdot (3, -2, 5)dt =$$

$$\int_0^1 (9t, -8t^3, -25t^2) \cdot (3, -2, 5)dt = \int_0^1 27t + 16t^3 - 125t^2 dt = \frac{27}{2}t^2 \mid_0^1 + \frac{16}{4}t^4 \mid_0^1 - \frac{125}{3}t^3 \mid_0^1 =$$

$$\frac{27}{2} + \frac{16}{4} - \frac{125}{3} = -\frac{145}{6}$$

Teorema de Green

El teorema de Green relaciona una integral doble sobre una región del plano con una integral curvilínea sobre la frontera de la región.
Sea C una curva descrita por una función vectorial continua $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.
Si $\alpha(a) = \alpha(b)$ se dice que c es cerrada
Si $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2) \quad \forall\ t_1, t_2 \in (a,b]$ se dice que c es cerrada simple
Curva de Jordan.-: Es una curva cerrada simple en el plano

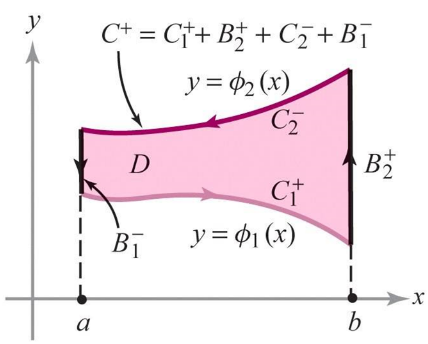


Región simplemente conexa.- Una región D es simplemente conexa si es conexa y el interior de toda curva de Jordan C contenida en D esta también contenida en D.

Teorema 1. *Teorema de Green Sea D una región simplemente conexa con un borde C (suave) orientado positivamente. Si el campo vectorial $F(x,y) = M(x,y)\hat{i} + N(x,y))\hat{j}$ es continuamente diferenciable en D tenemos que*

$$\int_c M \quad dx + N \quad dy = \int\int_D \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \; dxdy$$

Demostración. Primero demostraremos Teo. de Green para una región Tipo I. Supongamos que D es una región Tipo I con borde C.



En este caso se tiene que

$C_1^+ : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *esta dada por* $C_1^+(x) = (x, \phi_1(x))$

$$B_2^+(x) = (b,x) \quad x \in [\phi_1(b), \phi_2(b)]$$

$C_2^- : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *esta dada por* $C_2^-(x) = (x, \phi_2(x))$

$$B_2^-(x) = (a,x) \quad x \in [\phi_1(a), \phi_2(a)]$$

Tenemos que

$$C^+ = C_1^+ + B_2^+ + C_2^- + B_1^-$$

ahora bien si tomamos un campo en $\mathbb{R}^2$ dado por $F = [M(x,y), 0]$ se tiene que

$$\int_{c^+} F = \int_{C_1^+} F + \int_{B_2^+} F + \int_{C_2^-} F + \int_{B_1^-} F =$$

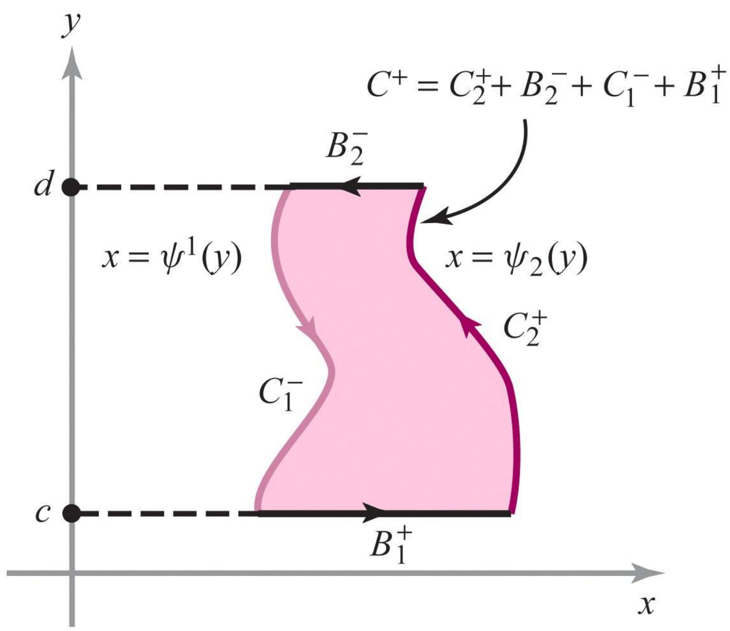
$$\int_a^b F(x,\phi_1(x))\cdot(1,\phi'(x))dx + \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} F(b,x)\cdot(0,1)dx - \int_a^b F(x,\phi_2(x))\cdot(1,\phi_2'(x))dx - \int_{\phi_1(a)}^{\phi_2(a)} F(a,x)\cdot(0,1)dx =$$

$$\int_a^b (M(x,\phi_1(x)),0)\cdot(1,\phi'(x))dx + \int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(b)} (M(b,x),0)\cdot(0,1)dx - \int_a^b (M(x,\phi_2(x)),0)\cdot(1,\phi_2'(x))dx - \int_{\phi_1(a)}^{\phi_2(a)} (M(a,x),0)\cdot(0,1)dx$$

$$= \int_a^b M(x,\phi_1(x))dx - \int_a^b M(x,\phi_2(x))dx$$

Comenzamos demostrando que $\int\int_D \frac{\partial M}{\partial y} \; dx \; dy = \int_C M \quad dx$ Como D es una región Tipo I, la frontera C se compone de una porción interior C_1 y una porción superior C_2 que son las gráficas de dos funciones

$\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ respectivamente, en un cierto intervalo $a \leq x \leq b$. En esta situación podemos calcular la integral doble por integración iterada
$\int\int_D \frac{\partial M}{\partial y} \; dy \; dx = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} \; dy \; dx = \int_a^b M\left[x, \phi_2(x)\right] - M\left[x, \phi_1(x)\right] dx =$
$\int_a^b M\left[x, \phi_2(x)\right] \quad dx - \int_a^b M\left[x, \phi_1(x)\right] dx = \int_{C_2^-} M \quad dx - \int_{C_1} M \quad dx = -\left[\int_{C_2} M \quad dx + \int_{C_1} M \quad dx\right] =$
$-\int_C M \quad dx$
Vamos a ver ahora que $\int\int_D \frac{\partial N}{\partial x} \; dx \; dy = \int_C N \quad dy$
Consideremos ahora la región como tipo II



Por lo tanto tenemos que:

$$\int\int_D \frac{\partial N}{\partial x} \; dx \; dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x} \; dx \; dy = \int_c^d N\left[\psi_2(x), y\right] - N\left[\psi_1(x), y\right] dy =$$

$$\int_c^d N\left[\psi_2(x), y\right] dy - \int_c^d N\left[\psi_1(x), y\right] dy = \int_{c_2} N\left[\psi_2(x), y\right] dy + \int_{c_1^-} N\left[\psi_1(x), y\right] dy$$

$$= \int_C N \; dy$$

$\therefore \quad \int\int_D \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \; dA = \int\int_D \frac{\partial N}{\partial x} \; dx \; dy - \int\int_D \frac{\partial M}{\partial y} \; dx \; dy = \int_C N \quad dy - \int_C -M \quad dx =$

$\displaystyle\int_C M \quad dx + N \quad dy$ $\square$

Ejercicio: Compruebe que se verifica el teorema de Green para la integral curvilínea $\displaystyle\int_t -y\ dx + x\ dy$ donde C es la curva cerrada