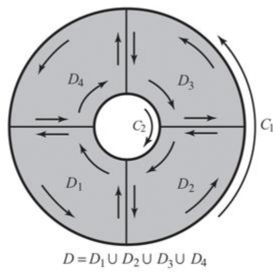
Teorema de Green para regiones con 'hoyos'

El Teorema de Green también es válido para regiones que se pueden descomponer en varios trozos, cada uno de los cuales es simple. Por ejemplo si la región D es un anillo y su frontera consiste en dos curvas $C = C_1 + C_2$ con las orientaciones indicadas



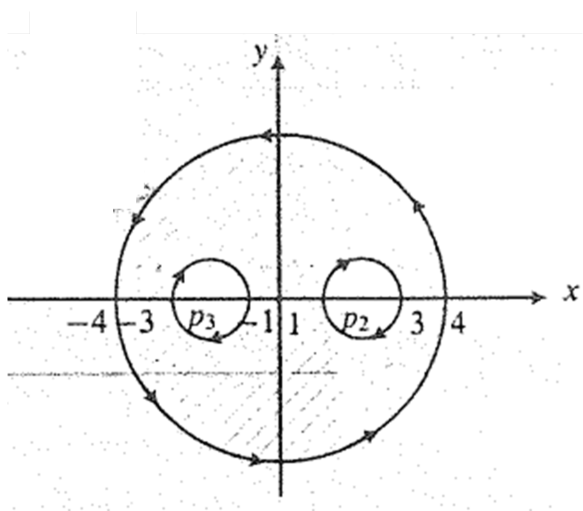
Si se aplica el Teorema a cada una de las regiones D1, D2 , D3 y D4 y se suman los resultados, se obtiene la identidad dada por el teorema de Green para D y su frontera C. El resultado es válido porque las integrales a lo largo de las líneas interiores opuestas se cancelan entre sí

Ejemplo Comprobar el teorema de Green para la región $R = R_1 \bigcup R_2 \bigcup R_3$ donde

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+2)^2 + y^2 \leq 11\}$$



Para la frontera R_1 se tiene la trayectoria $\lambda_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\lambda_1(t) = (4\cos(t), 4\,\mathrm{sen}(t))$$

Para la frontera R_2 se tiene la trayectoria $\lambda_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\lambda_2(t) = (\cos(t) + 2, -\operatorname{sen}(t))$$

Para la frontera R_3 se tiene la trayectoria $\lambda :_3 [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\lambda_3(t) = (\cos(t) - 2, -\operatorname{sen}(t))$$

sobre el campo $F(x, y) = (-y, x)$, tenemos que

$$\int_{Fr(R)} F = \int_{Fr(R_1)} F + \int_{Fr(R_2)} F + \int_{Fr(R_3)} F =$$

$$\int_0^{2\pi} ((-4\operatorname{sen}(t))(-4\operatorname{sen}(t)) + (4\cos(t))(4\cos(t)))dt + \int_0^{2\pi} ((\operatorname{sen}(t))(-\operatorname{sen}(t)) + (\cos(t)+2)(-\cos(t)))dt +$$

$$\int_0^{2\pi} ((\operatorname{sen}(t))(-\operatorname{sen}(t)) + (\cos(t) - 2)(-\cos(t)))dt = 32\pi - 2\pi - 2\pi = 28\pi$$

Por otra parte se tiene

$$\int\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \int\int_R (1 - (-1))\, dx\, dy = \int\int_R (2)\, dx\, dy = 2(\acute{A}reaR_1 - \acute{A}reaR_2 - \acute{A}reaR_3) =$$

$$2(\pi(4)^2 - \pi(1)^2 - \pi(1)^2) = 2(14\pi) = 28\pi$$

Área como Integral Curvilínea

Sea D una región simplemente conexa con borde C liso a trozos. El área A de la región D es igual a la integral

$$A = \frac{1}{2}\int_C -y \quad dx + x \quad dy$$

Demostración. Sea $F(x, y) = -y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}$. Como F es continuamente diferenciable en D, se puede aplicar el Teo. de Green.

$$\int_C -y \quad dx + x \quad dy = \int\int_D \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \quad dA = \int\int_D 2 \quad dA = 2A$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{2}\int -y \quad dx + x \quad dy$$ $\square$

Este resultado suministra otra técnica mas para hallar el área de una región, especialmente cuando la frontera esta dada en forma paramétrica.

Sea $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, dada por $\lambda(t) = [x(t), y(t)]$ una trayectoria de clase c^1 que parametriza la frontera de una región R positivamente. Si tomamos el campo $F(x,y) = (0,x)$ se obtiene según Green

$$\int\int_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\ dy = \int\int_R \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial 0}{\partial y}\right) dx\ dy = \int\int_R dx\ dy = \int\int_R dx\ dy = \acute{A}rea\ R$$

Por otro lado

$$\int_{Fr(R)} F = \int_{Fr(R)} F(x(t), y(t)) \cdot (0,1) dt = \int_{Fr(R)} x(t) \cdot y'(t)\ dt$$

por lo tanto

$$\acute{A}rea\ R = \int_{Fr(R)} x(t) \cdot y'(t)\ dt$$

Ejemplo Calcular el área encerrada por la curva $\lambda : [-2,2] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\lambda(t) = [t^3 - 4t, t^2 - 4]$

Solución Usando la fórmula encontrada

$$\int_{Fr(C)} (t^3 - 4t)(t^2 - 4)' dt = \int_{-2}^{2} (t^3 - 4t)(2t) dt = \int_{-2}^{2} 2t^4 - 8t^2 dt = \frac{256}{15}$$