Guia para el 2do examen parcial

Sección 1.13 Derivación bajo el signo de integral

1.-Calcular la siguiente integral

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$$

derivando respecto del parametro a en la integral

$$J(a) = \int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}$$

Sección 2.1 Integral de trayectoria

2.-Calcular la integral de trayectoria para $f(x,y,z) = z$ sobre la trayectoria $\alpha(t) = (t\cos(t), t\sin(t), t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
3.-Calcular la integral de trayectoria para $f(x,y) = x+y$ sobre el triángulo de vértices (0,0), (1,0), (0,1)
4.-Hallar la masa de un alambre cuya forma es la de la curva intersección de la esfera unitaria centrada en el origen y el plano $x+y+z=0$ si la densidad del alambre es $\rho(x,y,z) = x^2$

Sección 2.1 Integral de línea y Campos Conservativos

5.-Considerar el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$$

Y consideremos el circulo unitario parametrizado por $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$ para $t \in [0, 2\pi]$ compruebe que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

despues calcule

$$\int_\alpha F$$

e indique por que F no es conservativo
6.-Demuestre lo siguiente: si la integral $\displaystyle\int_\lambda F$ a lo largo de la trayectoria $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase c^1 depende solamente del punto inicial $\lambda(a)$ y del punto final $\lambda(b)$ de la trayectoria λ entonces el campo F es conservativo
7.-Calcule las integrales

$$a) \quad \int_{(1,0)}^{(3,2)} 2xydx + x^2dy \qquad b) \quad \int_{(0,0,0)}^{(3,-2,5)} 3xdx + y^3dy - z^2dz$$

8.-Si φ, ψ son funciones potenciales para un campo vectorial continuo F en un conjunto conexo abierto de $S \subset \mathbb{R}^n$, demostrar que $\varphi - \psi$ es constante en S

9.-Determinar si los campos vectoriales dados son conservativos, en caso afirmativo, hallar la función potencial

$$a)\ F(x,y) = (x,y)$$

$$b)\ F(x,y) = (2xe^y + y, x^2e^y + x - 2y)$$

$$c)\ F(x,y) = (\operatorname{sen}(xy) + xy\cos(xy), x^2\cos(xy))$$

10.-Compruebe el teorema de Green con el campo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $F(x,y) = (3x^2y, -x^3)$ y S es la región comprendida entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$

11.-Sea D una región simplemente conexa con borde C . Use el teorema de Green para mostrar que el área A de la región D es igual a la integral

$$A = \frac{1}{2}\int_c -y\ dx + x\ dy$$

12.-Use el teorema de Green para mostrar que el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es πab