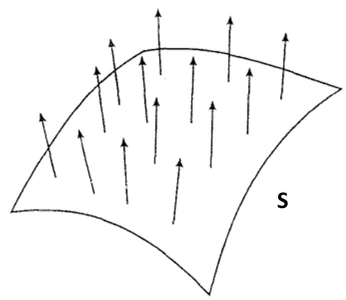
Una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ se dirá orientable si es posible decidir sin ambiguedad cuál es cada uno de los lados de la superficie
Una función $N : S \to \mathbb{R}^3$, definida en los puntos $q \in S$, tal que a cada $q \in S$ le asocia un vector $N(q) \in \mathbb{R}^3$, no nulo, ortogonal a S, se dice ser un campo de vectores normales a S.



Decir que una superficie es orientable, significa que podemos tener un campo de vectores normales a S, $N : S \to \mathbb{R}^3$, que no cambia repentinamente de un punto a otro es decir que este campo N sea continuo en S

$$\forall q,\ q' \ \in \ S \quad \|q - q'\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(q) - f(q')\| < \epsilon$$

Ejemplo La banda de Moebius parametrizada por

$$f(u,v) = \left(\left(1 - v \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\cos(u), \left(1 - v \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sen}(u), v\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \quad v \in [-1,1], \quad u \in [0, 2\pi]$$

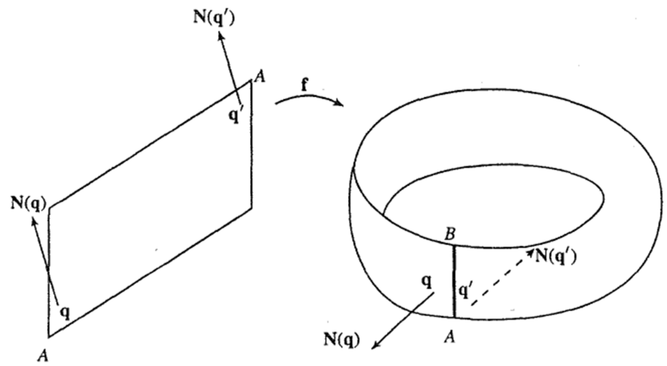
es tal que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left(-\frac{v}{2}\cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u) - \left(1 - v\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sen}(u), -\frac{v}{2}\cos\left(\frac{u}{2}\right)\operatorname{sen}(u) + \left(1 - v\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u), \frac{v}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u), -\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\operatorname{sen}(u), \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} = N_f =$$

$$\left(-\frac{v}{2}\operatorname{sen}(u) + \cos(u)\cos\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{v}{2}\cos(u)\operatorname{sen}(u), \frac{v}{2}\cos(u) + \operatorname{sen}(u)\cos\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{v}{2}\operatorname{sen}^2(u), \left(1 - v\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right)$$



ahora bien

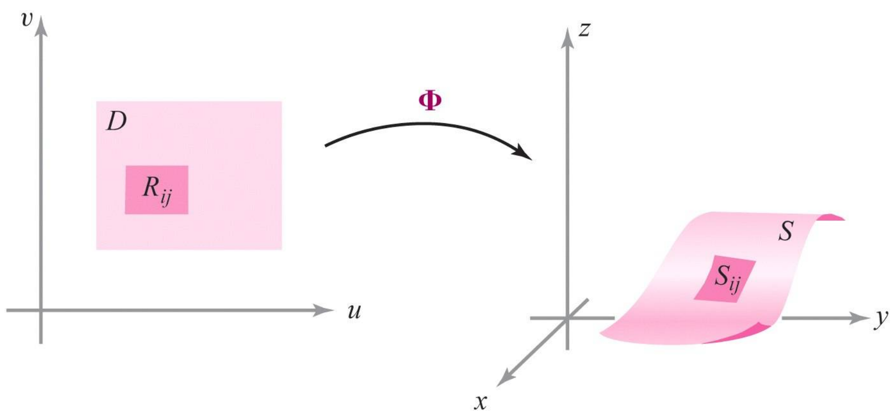
$$\lim_{(u,v)\to(0^+,0)} N_{f_{u,v}} = (1,0,0)$$

$$\lim_{(u,v)\to(2\pi^-,0)} N_{f_{u,v}} = (-1,0,0)$$

esto quiere decir que el campo N no es continuo

Integral de Superfície sobre funciones escalares

Consideremos el problema del cálculo de la masa total de una lámina, cuya forma es la de una superfície simple S. Supongamos que la lámina es muy delgada y que su densidad no sea constante. Podemos entonces pensar en una función de densidad ρ defnida sobre la superfície de modo que cada $(x, y, z) \in S$ le asocia el núumero real $\rho(x, y, z)$ que da el valor (en unidades de masa por unidad de área) de la densidad de la lámina en el punto (x, y, z). Si dividimos la superfície S en pequeños rectángulos S_{ij} . Si Φ es una función que parametriza a S, cada S_{ij} se puede ver como la imagen de un rectángulo R_{ij} correspondiente a una partición de la región D en pequeños rectángulos



Supongamos que $\rho : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función continua que en cada punto de S (superficie) nos asigna su densidad de masa, y que S esta parametrizada por la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ entonces, la masa de la lámina en $S_{ij} \approx \rho(x_{ij}, y_{ij}, z_{ik}) \cdot \acute{A}rea \quad R_{ij}$ de modo que la masa total de la lámina es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \rho(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) \cdot \acute{A}rea \quad R_{ij}$$

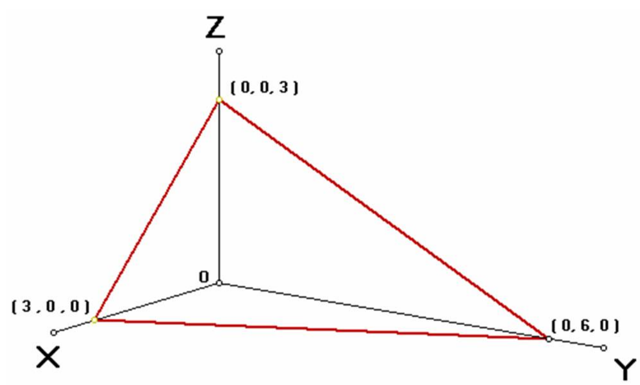
$\therefore$ La masa total de la lámina será

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \rho(f(u_{ij}, v_{ij})) \left\| \frac{\partial f}{\partial u}(u_{ij}, v_{ij}) \times \frac{\partial f}{\partial u}(u_{ij}, v_{ij}) \right\| = \int\int_D \rho \circ f(u,v) \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\| dudv$$

Definición 1. *Sea $S = f(D)$ una superfície paramétrica descrita por una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 y sean $\rho : V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo definido en un abierto V de $\mathbb{R}^3$ tal que $S \subset V$. Se define la integral de superfície como*

$$\int_S \rho ds = \int\int_D \rho \circ f(u,v) \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} \right\| dudv$$

Ejemplo Evaluar la integral de superfície $\int\int_S y^2 + 2yz \; ds$ donde S es la porción del plano $2x+y+2z = 6$ que se encuentra en el primer octante



Solución En este caso tenemos que $\rho(x,y,z) = y^2 + 2yz$ mientras que de la ecuación $2x + y + 2z = 6$ despejando a la z $z = \frac{1}{2}(6 - 2x - y)$ podemos obtener una parametrización

$$f(u,v) = (u, v, \frac{1}{2}(6 - 2u - v))$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (1, 0, -1), \quad \frac{\partial f}{\partial v} = (0, 1, -\frac{1}{2}) \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (1, \frac{1}{2}, 1)$$

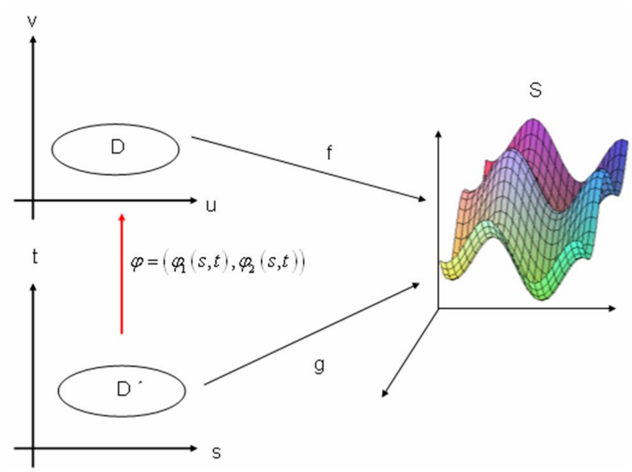
por lo tanto

$$\int\int_S y^2+2yzds=\int\int_D \rho(u,v,\frac{1}{2}(6-2u-v))\sqrt{1+1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}dA=$$

$$\int\int_D \left(v^2+2v\left(\frac{1}{2}\right)(6-2u-v)\right)\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}dA=\frac{3}{2}\int\int_D (6v-2uv)\,dA=$$

$$3\int_0^3\int_0^{6-2u} v(3-u)dvdu=6\int_0^3(3-u)^3du=-\frac{3}{2}(3-u)^4\,|_0^3=\frac{243}{2}$$

El valor de la integral no depende de la parametrización

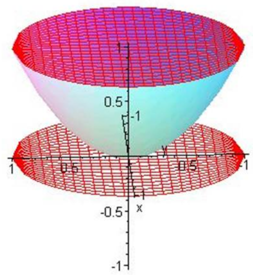


Sea $g=f\circ\varphi$ por lo tanto tenemos que

$$\int\int_D \rho dA=\int\int_D \rho(f(u,v))\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\times\frac{\partial f}{\partial v}\right\|dudv\underbrace{=}_{(u,v)=\varphi(s,t)}\int\int_{D'}\rho(f(\varphi(s,t)))\left\|N_f(\varphi(s,t))\right\|\left|\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)}\right|dsdt$$

$$\int\int_{D'}\rho(f(g(s,t)))\left\|N_g(s,t)\right\|dsdt=\int\int_{D'}\rho dA$$

Ejemplo Sea $\rho:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por $\rho(x,y,z)=ax+by+z$ donde a,b son constantes dadas y consideremos la superfície $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ parametrizada por $f(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$ sobre la región $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|u^2+v^2\le 1\}$ (La superfície es un paraboloide $z=x^2+y^2$ que se encuentra debajo del plano $z=1$)



Solución Tenemos que dada la parametrización de la superfície $f(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$ entonces

$$T_u=\frac{\partial f}{\partial u}=(1,0,2u) \qquad T_v=\frac{\partial f}{\partial v}=(0,1,2v)\Rightarrow \|T_u\times T_v\|=\|(-2,,-2v,1)\|$$

por otra parte

$$\rho(f(u,v))=\rho(u,v,u^2+v^2)=au+by+z$$

$\therefore$

$$\int_s f ds=\int\int_s (au+by+z)\,\|(-2,,-2v,1)\|\,dudv \underbrace{=}_{Polares} \int_0^1\int_0^{2\pi}(ar\cos(\theta)+br\sin(\theta)+r^2)\sqrt{1+4r^2}\cdot rdrd\theta$$

$$=\int_0^1\int_0^{2\pi} ar^2\cos(\theta)\sqrt{1+4r^2}drd\theta+\int_0^1\int_0^{2\pi} br^2\sin(\theta)\sqrt{1+4r^2}drd\theta+\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\sqrt{1+4r^2}drd\theta$$

Vamos a trabajarlas por separado

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} ar^2\cos(\theta)\sqrt{1+4r^2}drd=\int_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}dr\int_0^{2\pi} a\cos(\theta)d\theta=\int_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}dr\left(a\sin(\theta)\,\big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$\int_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}dr\cdot(0)=0$$

Para la segunda

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} br^2\sin(\theta)\sqrt{1+4r^2}drd\theta=\int_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}dr\int_0^{2\pi} b\sin(\theta)d\theta=\int_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}dr\left(-b\cos(\theta)\,\big|_0^{2\pi}\right)=$$

$$\int_0^1 r^2\sqrt{1+4r^2}dr\,(0)=0$$

Finalmente

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\sqrt{1+4r^2}drd\theta=\int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}dr\int_0^{2\pi}d\theta=\int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}dr(2\pi)=$$

$$\frac{1}{8}\int_0^1 r^2 8r\sqrt{1+4r^2}dr(2\pi) \underbrace{=}_{\substack{u=r^2 \quad du=2rdr \\ dv=8r\sqrt{1+4^2} \quad v=\frac{2}{3}(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}} \frac{1}{8}\left(r^2\left(\frac{2}{3}\right)(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{2}{3}\right)\int_0^1(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}2rdr\right)(2\pi)$$

$$= \left(\frac{\pi}{12}\right)\left(5^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}\right)$$

Ahora vamos a dar una reparametrización de la región $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$, para ello consideremos la región $D' = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 | s^2 + t^2 \leq \frac{1}{2}\}$ y vamos a proceder de la siguiente forma:

$$s^2 + t^2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2s^2 + 2t^2 \leq 1 \Rightarrow s^2 + 2st + t^2 + s^2 - 2st + t^2 \leq 1 \Rightarrow (s+t)^2 + (s-t)^2 \leq 1$$

por lo tanto proponemos $g(s,t) = (s+t, s-t) = (u,v)$ y la reparametrización $\phi : D' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ quedaria

$$\phi(s,t) = f \circ g(s,t) = f(g(s,t)) = f(s+t, s-t) = (s+t, s-t, (s+t)^2 + (s-t)^2) = (s+t, s-t, 2s^2 + 2t^2)$$

donde

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = (1,1,4s) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = (1,-1,4t) \quad \Rightarrow \quad \left\| \frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\| = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 4s \\ 1 & -1 & 4t \end{vmatrix} = (4s + 4t, 4s - 4t, -2)$$

Por lo tanto para calcular la integral de superfície $\rho(x,y,z) = ax + by + z$ se tiene que

$$\int\int_{D'} \rho dA = \int\int_{D'} \rho(\phi(s,t)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial s} \times \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\| dsdt =$$

$$\int\int_{D'} \left(a\,(s+t) + b\,(s-t) + 2s^2 + 2t^2\right) \sqrt{4 + 32(s^2+t^2)} dsdt$$

$$\underbrace{=}_{Polares} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left((a+b)r\cos(\theta) + (a-b)r\sin(\theta) + 2r^2\right) \sqrt{4 + 32r^2} r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2r^3 \sqrt{4 + 32r^2} dr d\theta = (2\pi) \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4r^3 \sqrt{1 + 8r^2} dr = (2\pi) \left(\frac{5^{\frac{3}{2}}}{24} + \frac{1}{120}\right) = \left(\frac{\pi}{12}\right)\left(5^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}\right)$$