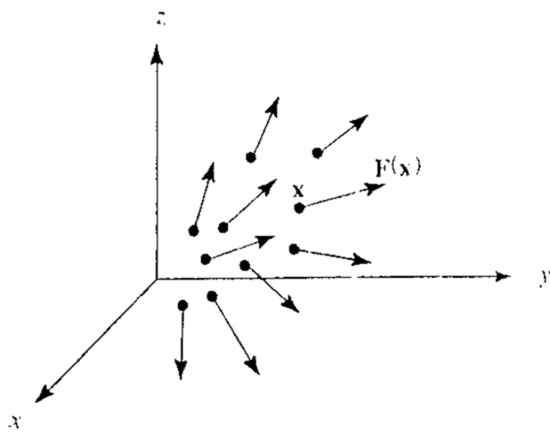
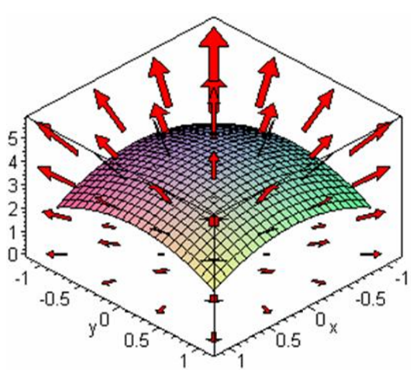
Integral de Superfície sobre funciones vectoriales

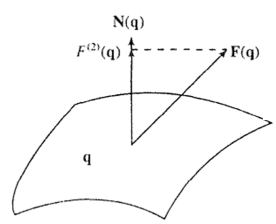
Supongamos que $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un campo continuo en $\mathbb{R}^3$



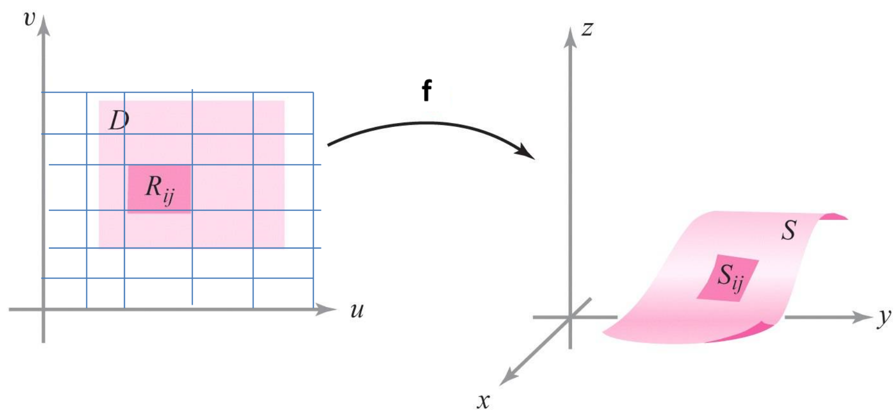
Y sea S una superficie suave. Si F representa el campo de velocidades de un fluido, se trata de ver cuál es el flujo de éste a través de la superficie S.



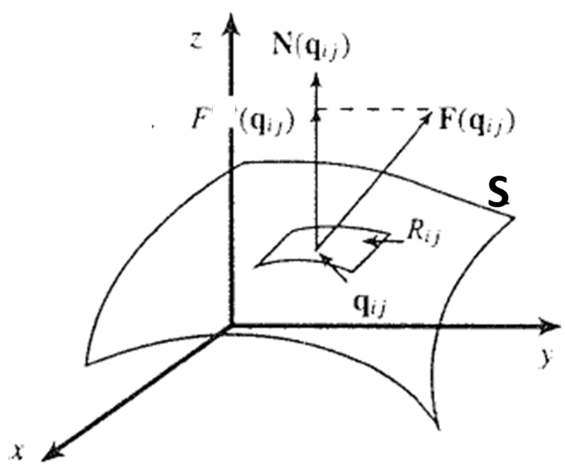
La integral de superfície de un campo vectorial puede interpretarse como el flujo del campo a través de la superfície. Intuitivamente el flujo de un campo de vectores a través de una superfície es la parte de dicho campo que atraviesa la superfície.



Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie S, y tomemos la orientación de S según el campo continuo de vectores normales $N : S \to \mathbb{R}^3$. Si hacemos una partición de la región D en rectangulos R_{ij}, las imagenes $f(R_{ij})$ proporcionan una partición de la superficie S,



en cada rectángulo R_{ij} tomamos un punto $(u_{ij}, v_{ij}) = p_{ij}$, y consideramos la imagen de éste $f(p_{ij}) = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) = q_{ij}$ el cual se encontrara en el rectángulo $f(R_{ij}) = S_{ij}$. Una estimación aproximada del flujo del campo F a través del rectángulo S_{ij} se obtiene al multiplicar la componente $F(q_{ij})$ sobre $N(q_{ij})$ por el área del rectángulo S_{ij}



tenemos que

$$flujo\ (S_{ij}) = \frac{F(q_{ij}) \cdot N(q_{ij})}{\|N(q_{ij})\|}\ \acute{a}rea\ f(R_{ij}) = \frac{F(q_{ij}) \cdot N(q_{ij})}{\|N(q_{ij})\|} \|N(q_{ij})\| \triangle_{u_{ij}} \triangle_{v_{ij}} = F(q_{ij}) \cdot N(q_{ij}) \triangle_{u_{ij}} \triangle_{v_{ij}}$$

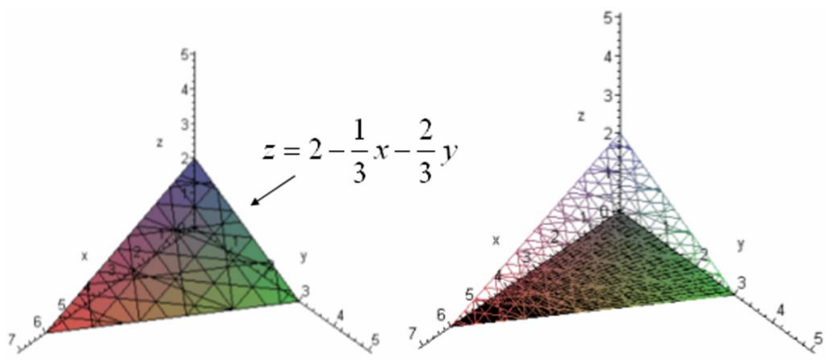
por lo tanto el flujo a través de S

$$\lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} F(q_{ij}) \cdot N(q_{ij}) \triangle_{u_{ij}} \triangle_{v_{ij}} \underbrace{=}_{suma\ de\ Riemann} \int\int_D F(f(u,v)) \cdot N(f(u,v))dudv$$

Definición 1. *Sea $S = f(D)$ una superfície paramétrica y sea $F : V \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en el abierto V tal que $S \subset V$. Se define la integral de superfície del campo vectorial F como*

$$\int\int_D F\left(f(u,v)\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}\right) dudv$$

Ejemplo Vamos a calcular el flujo del campo $F(x,y,z) = (x,-2y,-z)$ a través de la superfície $s = \{(x,y,z)|x+2y+3z=6, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$



Tenemos que una parametrización de esta superfície sería $r(x,y) = (x,y,2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y)$ $\therefore$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = (1,0,-\frac{1}{3}) \quad \frac{\partial r}{\partial y} = (0,1,-\frac{3}{3}) \quad \left(\frac{\partial r}{\partial x}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right) = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$$

Mientras que para evaluar la parametrización en el campo tenemos que

$$F(r(x,y)) = F(x,y,2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y) = (x,-2y,-2+\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y)$$

$\therefore$

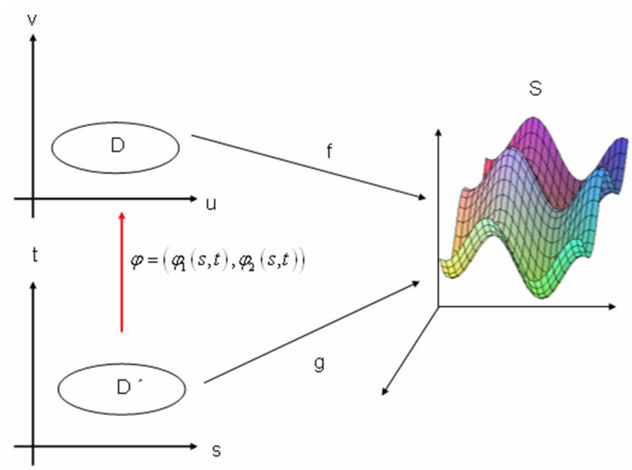
$$\int\int_D F\left(r(u,v)\right)\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right)dudv = \int_0^6\int_0^{3-\frac{x}{2}}\left(x,-2y,-2+\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\right)\cdot\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)dydx$$

$$= \int_0^6\int_0^{3-\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{3}-\frac{4y}{3}-2+\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}\right)dydx = \int_0^6\int_0^{3-\frac{x}{2}}\left(\frac{2x}{3}-\frac{2y}{3}-2\right)dydx =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^6\int_0^{3-\frac{x}{2}}(2x-2y-6)\,dydx = \frac{1}{3}\int_0^6\left(2xy-y^2-6y\Big|_0^{3-\frac{x}{2}}\right)dx = \frac{1}{12}\int_0^6\left(30x-108-5x^2+18x\right)dx$$

$$\frac{1}{12}\left(\frac{30x^2}{2}-180x-\frac{5x^3}{6}+\frac{18x^2}{2}\Big|_0^6\right) = \frac{1}{2}(190-108-60+54) = \frac{1}{2}(-24) = -12$$

En el caso de las integrales de superfície sobre campos vectoriales vamos a ver que su valor no depende de la parametrización



Tenemos que $g = f \circ \varphi$ por lo tanto

$$\int\int_D F\left(f(u,v)\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\right)dudv \underbrace{=}_{(u,v)=\varphi(s,t)}$$

$$\int\int_D F(f(\varphi(s,t)))\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial u}(\varphi(s,t))\times\frac{\partial f}{\partial v}(\varphi(s,t))\right)\left|J\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)}\right|dsdt =$$

$$\int\int_{D'} F(g(s,t))\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial s}(s,t)\times\frac{\partial g}{\partial t}(s,t)\right)\left(\frac{1}{J\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)}}\right)\left|J\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)}\right|dsdt =$$

$$\pm\int\int_{D'} F(g(s,t))\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial s}\times\frac{\partial g}{\partial t}\right)dsdt$$

El signo (-) indica que la reparametrización g recorre S con orientación contraria a f