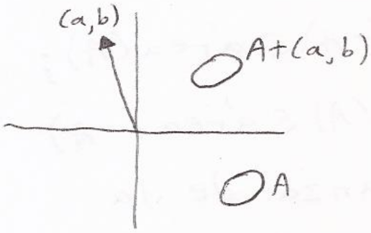
Área

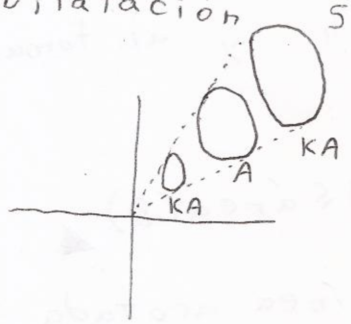
07/08/2014

- Traslación $A+(a,b)=\{(x+a,y+b) \mid (x,y)\in A\}$



Invarianza $\rightarrow$ área$(A+(a,b))=$ área(A)

- Dilatación Sea $K>0$ real $\Rightarrow KA=\{(Kx,Ky) \mid (x,y)\in A\}$

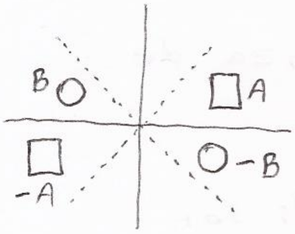


$\forall$ rectángulo KQ se cumple $\|KQ\|=K^2\|Q\|$

Invarianza $\rightarrow$ área$(KA)=K^2$ área(A)

- Reflexión

$-A=\{(-x,-y) \mid (x,y)\in A\}$



Invarianza $\rightarrow$ área$(-A)=$ área(A)

- Monotonicidad área$(A)\leq$ área(B) si $A\subset B\subset \mathbb{R}^2$
- Subaditividad área$(A)\leq \sum_{n=1}^{\infty}$ área(A_n) donde A_n es recubrimiento o pedazos de A.

Ejercicios

① Establece la invarianza de reflexión y monotonicidad del área.

Sol.

Si Q es un rectángulo $\Rightarrow -Q$ también lo es y $\|Q\|=\|-Q\|$. Ahora, si $\{Q_n\}$ recubre a A $\Rightarrow$ $\{-Q_n\}$ recubren a $-A$, i,e

$\text{área}(-A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|-Q_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|Q_n\|$ y al tomar el ínfimo sobre la suma de la derecha tenemos que $\text{área}(-A) \leq \text{área}(A)$; ahora, cambiando A por $-A$ obtenemos $\text{área}(A) \leq \text{área}(-A)$ $\therefore$ $\text{área}(-A) = \text{área}(A)$, la cual es la invarianza de la reflexión. Para la monotonicidad, si $A \subset B$ y $\{Q_n\}$ recubre a $B \Rightarrow \{Q_n\}$ recubre a A $\Rightarrow \text{área}(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|Q_n\|$ y al tomar el ínfimo sobre la suma obtenemos

$\text{área}(A) \leq \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \|Q_n\|\} = \text{área}(B)$ $\therefore$ $\text{área}(A) \leq \text{área}(B)$ ▲

② Muestra que el área de un segmento de línea acotado es cero y el área de cualquier línea es cero.

Sol.

Sea L un segmento de línea. Debido a la invarianza de traslación y dilatación podemos asumir que $L = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ y = mx,\ m \in \mathbb{R}\}$. Ahora bien, si Q_i son rectángulos de la forma $Q_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{m(i-1)}{n}, \frac{mi}{n}]$ con $i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \{Q_i\}$ recubren a L y $\sum_{n=1}^{\infty} \|Q_i\| = \sum_{n=1}^{\infty} (|\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}| |\frac{mi}{n} - \frac{m(i-1)}{n}|)$

$= \underbrace{\frac{m}{n^2} + \frac{m}{n^2} + \dots + \frac{m}{n^2}}_{n\text{-veces}} = \frac{nm}{n^2} = \frac{m}{n}$ y al toma el ínfimo, i,e al tomar el límite cuando $n \to \infty$ sobre la suma $(\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} = 0)$ se concluye que el $\text{área}(L) = 0$.

Por otro lado, como L es la unión numerable de segmentos de línea $\Rightarrow$ por subaditividad $\text{área}(L) = 0$ para cualquier L. ▲

③ Un mapeo $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es lineal si es de la forma $L(x,y)=(ax+by,cx+dy)$ con $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Muestra que el mapeo lineal manda líneas a líneas (posiblemente colapsadas) y paralelogramos a paralelogramos (posiblemente colapsados). Muestra que L es invertible (i,e, una biyección) si el real $\det(L)=ad-bc\neq 0$. En este caso, muestra que la inversa K de L es lineal y calcula $\det(K)$.

Sol.

Supongamos que $(X,Y)=(ax+by,cx+dy)$ y (x,y) se encuentra en una línea con subida m y corrida n, i,e, $(x,y)=(nt+p,mt+q)$ $\Rightarrow (X,Y)=(a(nt+p)+b(mt+q),c(nt+p)+d(mt+q))=(ant+ap+bmt+bq,cnt+cp+dmt+dq)$
$=((an+bm)t+ap+bq,(cn+dm)t+cp+dq)\Rightarrow$
$(X,Y)=(Nt+P,Mt+Q)$ con $N=an+bm$ y $M=cn+dm$, i,e (X,Y) se encuentra en una línea con subida M y corrida N, $\therefore L$ manda líneas a líneas.

Ahora bien, ya que la pendiente de la nueva línea depende solamente de la original $\Rightarrow L$ manda líneas paralelas a líneas paralelas $\therefore L$ manda paralelogramos a paralelogramos.

Después, L es una biyección si el par de ecuaciones $(X,Y)=(ax+by,cx+dy)$ pueden ser resueltas de manera única para (x,y), pero estas ecuaciones son equivalentes a $(dX-bY,-cX+aY)=(ad-bc)(x,y)$ la cual puede ser resuelta si $ad-bc=\det(L)\neq 0$. Más aún, la solución (inversa de L) es
$K(X,Y)=(dX-bY,-cX+aY)/\det(L)=(x,y)=(AX+BY,CX+DY)$

con $A = \frac{d}{\det(L)}$, $B = \frac{-b}{\det(L)}$, $C = \frac{-c}{\det(L)}$ y $D = \frac{a}{\det(L)}$

la cual muestra que K es lineal y

$$\det(K) = AD - BC = \frac{ad}{(\det(L))^2} - \frac{bc}{(\det(L))^2} = \frac{\det(L)}{(\det(L))^2} = \frac{1}{\det(L)} \quad \blacktriangle.$$