18/09/2014

Integrales de trayectoria

Área de la pared $= \int_{t_1}^{t_2} f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|dt$ ó

Masa del alambre $= \int_{t_1}^{t_2} \rho(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|dt$ donde $t\in[t_1, t_2]$,

$\sigma(t)$ es una trayectoria. y $\rho(x,y,z)$ es la función de densidad.

① $f(x,y,z) = e^{\sqrt{z}}$, $\sigma(t)=(1,2,t^2)$ $t\in[0,1]$ $\Rightarrow$

$f(\sigma(t)) = e^t$ y $\sigma'(t)=(0,0,2t)$

$\Rightarrow \int_0^1 2te^t dt = 2(te^t - e^t)\Big|_0^1 = 2$

$u=t$ $dv=e^t dt$
$du=dt$ $v=e^t$

② $\rho(x,y,z) = x+y+z$, $\sigma(t)=(\text{Sen}t, \text{Cos}t, t)$ $t\in[0,2\pi]$

$\Rightarrow \rho(\sigma(t)) = \text{Sen}t + \text{Cos}t + t$, $\sigma'(t) = (\text{Cos}t, -\text{Sen}t, 1)$, $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow \int_0^{2\pi} (\text{Sen}t + \text{Cos}t + t)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left(-\text{Cos}t + \text{Sen}t + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$

$= 2\sqrt{2}\pi^2$ gramos

③ $f(x,y,z) = \frac{1}{y^3}$, $\sigma(t) = (\ln t, t, 2)$, $t\in[1,e]$

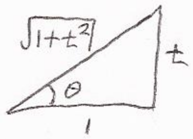
$\Rightarrow f(\sigma(t)) = \frac{1}{t^3}$, $\sigma'(t) = (\frac{1}{t}, 1, 0)$, $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$

$\Rightarrow \int_1^e \frac{1}{t^3}\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}dt = \int_1^e \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^4}dt = \int_1^e \frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan^4\theta}\sec^2\theta\, d\theta$

$t=\tan\theta$
$dt = \sec^2\theta\, d\theta$

$= \int_1^e \frac{\sec^3\theta}{\tan^4\theta}d\theta = \int_1^e \frac{\cos\theta}{\text{sen}^4\theta}d\theta \quad \ldots ①$ haciendo $u=\text{Sen}\theta$, $du = \text{Cos}\theta\, d\theta$

$$\Rightarrow ① = \int_1^e u^{-4}\,du = -\frac{1}{3u^3} = -\frac{1}{3}\csc^3\theta$$



$$= -\frac{1}{3}\,\frac{(1+t^2)^{3/2}}{t^3}\Big|_1^e$$

$$= \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - \frac{(1+e^2)^{3/2}}{e^3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - (1+e^{-2})^{3/2}\right)$$

④ $\rho(x,y,z) = \dfrac{x+y}{y+z}$, $\sigma(t) = (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t)$, $t\in[1,2]$

$$\Rightarrow \rho(\sigma(t)) = \frac{t+\frac{2}{3}t^{3/2}}{\frac{2}{3}t^{3/2}+t} = 1 \qquad \sigma'(t) = (1, t^{1/2}, 1), \quad \|\sigma'(t)\| = \sqrt{2+t}$$

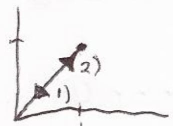
$$\Rightarrow \int_1^2 \sqrt{2+t}\,dt = \frac{2}{3}(2+t)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}\left(8-3^{3/2}\right) \text{ gramos}$$

⑤ $f(x,y) = 2x-y$, $\sigma(t) = (t^4, t^4)$, $t\in[-1,1]$

$f(\sigma(t)) = t^4$, $\sigma'(t) = (4t^3, 4t^3)$, $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{32t^6} = \sqrt{32}\,t^3$

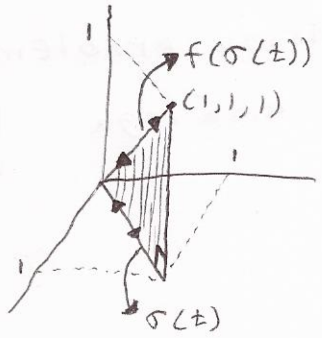
$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \sqrt{32}\,t^7\,dt = \sqrt{32}\,\frac{t^8}{8}\Big|_{-1}^1 = 0$$

Aquí surge un problema, el área (integral) no puede ser cero, analizando $\sigma(t)$ uno se puede dar cuenta que se trata de una identidad en el plano xy, que se mueve del punto $(1,1)$ al $(0,0)$ cuando $-1\leq t\leq 0$ y de $(0,0)$ al $(1,1)$ cuando $0\leq t\leq 1$, i,e, recorre 2 veces la trayectoria, una en un sentido y la otra en sentido opuesto, lo que propicia que la integral sea 0.



18/09/2014

Por otro lado, $f(x,y)=2x-y$ (ó $f(\sigma(t))$) se mueve del $(1,1,1)$ al $(0,0,0)$ cuando $-1\leq t\leq 0$ y del $(0,0,0)$ al $(1,1,1)$ cuando $0\leq t\leq 1$, i.e, se barren 2 veces el área del triángulo generado en sentidos opuestos.



La solución a esto es $\int_{-1}^{1} = 2\int_{0}^{1}$

$$\Rightarrow 2\int_0^1 \sqrt{321}\,t^7\,dt = 2\sqrt{321}\,\frac{t^8}{8}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{321}}{8} = \sqrt{21}$$

⑥ $r(\theta)=1+\cos\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$. Calcular longitud de arco.

Como vamos a calcular la longitud de arco $\Rightarrow$ $f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)=1$ y recordando la fórmula:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\,\text{Sen}\,\theta)\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$\Rightarrow r^2 = 1+\cos^2\theta+2\cos\theta \quad y \quad r'(\theta) = -\text{Sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2\theta+2\cos\theta+\text{Sen}^2\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{4(1+\cos\theta)}{2}}\,d\theta = 2\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\,d\theta \;\cdots ①$$

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \text{Sen}^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

$$\Rightarrow ① = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}}\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Llegamos nuevamente al mismo problema del ejercicio ⑤, $\Rightarrow$ procediendo de forma análoga $\int_0^{2\pi} = 2\int_0^{\pi}$

$$\Rightarrow 2\left(4\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\Big|_0^{\pi}\right) = 8$$