30/09/2014

Segundo examen parcial

1) Calcule la integral

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx$$

derivando

$$J(a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x}\, dx \quad \dots ①$$

Sol.

Derivando $J(a)$ respecto de a de acuerdo a la regla de Leibniz y recordando que $x^a = e^{a\ln x}$ $\Rightarrow$

$$J'(a) = \int_0^1 \frac{x^a \cancel{\ln x}}{\cancel{\ln x}}\, dx = \int_0^1 x^a dx = \left.\frac{x^{a+1}}{a+1}\right|_0^1 = \frac{1}{1+a}$$

$\Rightarrow J'(a) = \frac{1}{1+a}$, ahora, integrando $J'(a)$ respecto de a obtenemos

$$\int J'(a)\,da = J(a) = \int \frac{da}{1+a} = \ln(1+a) + c$$

$$\therefore J(a) = \ln(1+a) + c \quad \dots ②$$

Ahora bien, $J(0) = 0$ de ① y $J(0) = c$ de ②

$\Rightarrow c = 0$

$$\therefore J(a) = \ln(1+a)$$

$$\therefore I = J(1) = \ln 2$$

2) Un alambre tiene la forma de la curva $(x^2+y^2)^2 = 2xy$, calcule su masa si la densidad en un punto (x,y) del alambre está dada por la función $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Sol.

Haciendo cambio a polares, $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

$$\Rightarrow (r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta)^2 = 2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow r^4 = 2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{2\cos\theta\operatorname{sen}\theta} = \sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}$$

$$\therefore r(\theta) = \sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}$$

$$\Rightarrow r'(\theta) = \frac{1}{2}\frac{2\cos(2\theta)}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}} = \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}}$$

y $f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\operatorname{sen}\theta) = r^2 = \operatorname{sen}(2\theta) = \rho(\theta)$ la densidad del alambre.

$$\therefore \int_a^b f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\operatorname{sen}(\theta))\sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{sen}(2\theta)\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta) + \frac{\cos^2(2\theta)}{\operatorname{sen}(2\theta)}}\,d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\operatorname{sen}(2\theta)\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)+\cos^2(2\theta)}{\operatorname{sen}(2\theta)}}\,d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}}\,d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}\,d\theta$$

③ Pruebe que la integral

$$\int_\gamma (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$$

es independiente de la trayectoria que une los puntos $(1,2)$ con $(3,4)$ y calcule el valor de la integral utilizando la función potencial.

Sol.

Para demostrar que la integral es independiente de la trayectoria que une dichos puntos basta con probar que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(6xy^2 - y^3) = 12xy - 3y^2 \quad y$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y - 3xy^2) = 12xy - 3xy^2$$

30/09/2014

$\therefore\ \partial_y F_1 = 12xy - 3y^2 = \partial_x F_2$

$\therefore$ F es un campo conservativo

$\therefore\ \int_\gamma F\cdot ds$ es independiente de la trayectoria que une $(1,2)$ con $(3,4)$.

$\therefore\ \exists f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ \ \ni\ \nabla f = F \Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^2 - y^3 \quad \cdots ①$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2 \cdots ②$$

Integrando ① respecto de x obtenemos

$f(x,y) = 3x^2y^2 - xy^3 + h(y)$

y derivando esto último respecto de y

$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2 + h'(y)$, comparando con ② $\Rightarrow h'(y) = 0$

$\Rightarrow h(y) = c$

$\therefore\ f(x,y) = 3x^2y^2 - xy^3 + c$

$$\Rightarrow \int_\gamma F\cdot ds = \int_\gamma \nabla f\cdot ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(3,4) - f(1,2)$$

$$= 3\cdot 3^2\cdot 4^2 - 3\cdot 4^3 + c - (3\cdot 1^2\cdot 2^2 - 1\cdot 2^3 + c) = 236$$

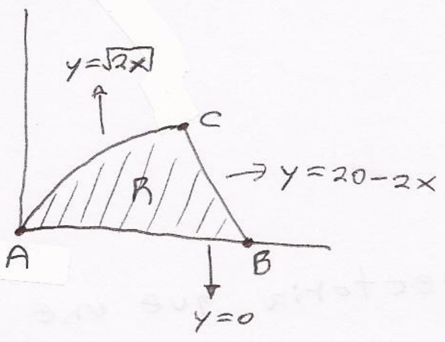
4) Calcule el área de la región del 1er. cuadrante en $\mathbb{R}^2$ comprendida entre las curvas

$$y^2 = 2x\ ,\ 2x + y = 20\ ,\ y = 0$$

mediante una integral de línea.

Sol.

Recordando que $A = \frac{1}{2}\int_c -y\,dx + x\,dy \quad \Rightarrow$



$A=(0,0)$

En $2x+y=20$ si $y=0 \Rightarrow x=10$

$\therefore B=(10,0)$

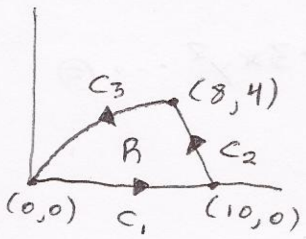
Para C tenemos que si $2x+y=20$ y $y^2=2x \Rightarrow y^2+y-20=0 \Rightarrow (y+5)(y-4)=0$

$\Rightarrow y=-5 \to$ NO

$y=4 \to$ SI

$\Rightarrow$ si $y=4 \Rightarrow x=8 \quad \therefore C=(8,4)$

$\Rightarrow$



$C_1(t)=(t,0) \quad t\in[0,10]$

$C_2(t)=(10,0)+t((8,4)-(10,0))=(10,0)+t(-2,4)$

$=(10-2t,\,4t) \quad t\in[0,1]$

$C_3(t)=(t,\sqrt{2t}) \quad t\in[0,8]$

en donde $C_3(0)=(0,0)$ y $C_3(8)=(8,4)$, donde se puede ver que $C_3(t)$ describe la trayectoria correcta pero en sentido opuesto. $\Rightarrow$

$$A(R)=\frac{1}{2}\int_C F\cdot ds=\frac{1}{2}\left(\int_{C_1}F\cdot ds+\int_{C_2}F\cdot ds-\int_{C_3}F\cdot ds\right)$$

$\to$ para que recorra la trayectoria en el sentido correcto.

$$\int_{C_1}F\cdot ds=\int_0^{10}(-0(1)+t(0))dt=0$$

$$\int_{C_2}F\cdot ds=\int_0^1(-4t(-2)+(10-2t)4)dt=\int_0^1 40\,dt=40$$

$$\int_{C_3}F\cdot ds=\int_0^8\left(-\sqrt{2t}(1)+t\left(\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{\sqrt{2t}}\right)\right)dt=\int_0^8\left(-\sqrt{2t}+\frac{\sqrt{2t}}{2}\right)dt=\int_0^8-\frac{\sqrt{2t}}{2}dt$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^8 t^{1/2}dt=-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}t^{3/2}\Big|_0^8=-\frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2})^3=-\frac{8}{3}\sqrt{2}\,2^{3/2}=-\frac{8}{3}\cdot 2^2$$

30/09/2014

$= -\frac{32}{3}$

$\therefore\ A(R) = \frac{1}{2}\left(0 + 40 - \left(-\frac{32}{3}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{152}{3}\right) = \frac{152}{6} = \frac{76}{3}$

Comprobando dicho resultado con Green $\Rightarrow$

$\frac{1}{2}\int_C F\cdot ds = \frac{1}{2}\iint_R (\partial_x Q - \partial_y P)\,dx\,dy$ donde $Q = x$ y $P = -y$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_C F\cdot ds = \int_0^4 \int_{\frac{y^2}{2}}^{10-\frac{y}{2}} dx\,dy = \int_0^4 \left(10 - \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}\right) dy = \left(10y - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^4$

$\hookrightarrow$ vista como región tipo II

$= 40 - 4 - \frac{64}{6} = 36 - \frac{32}{3} = \frac{108}{3} - \frac{32}{3} = \frac{76}{3}$

Con lo cual se comprueba efectivamente que $A(R) = \frac{76}{3}$