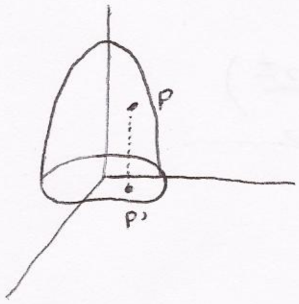
02/10/2014

Parametrización de Superficies

Encontrar una parametrización de las siguientes superficies.

① El paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

Sol.



p' se mueve en $(a\cos t, a\operatorname{sen} t)$

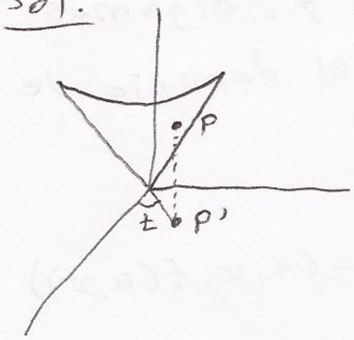
$\Rightarrow z = 9 - a^2\cos^2 t - a^2\operatorname{sen}^2 t = 9 - a^2$

$\Rightarrow \phi(a,t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, 9-a^2)$

$t \in [0, 2\pi]$ $a \in [0,3]$

② La porción del cono en el 1er. octante $z = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ entre los planos $z=0$ y $z=3$

Sol.



p' se mueve en $(a\cos t, a\operatorname{sen} t)$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow z = \dfrac{\sqrt{a^2}}{2} = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow$ si $z = 0 \Rightarrow a = 0$
si $z = 3 \Rightarrow a = 6$

$\therefore \phi(a,t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, \frac{a}{2})$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $a \in [0,6]$

③ La porción cortada del cilíndro parabólico $y = x^2$ por los planos $z=0$, $z=3$, $y=2$

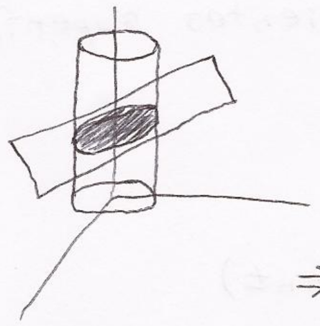
Una posible parametrización es

$\phi(t,z) = (t, t^2, z)$ si $y = 2 \Rightarrow t^2 = 2$

$\Rightarrow t = \pm\sqrt{2}$

$\therefore t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $z \in [0,3]$

④ La porción del plano $y+2z=2$ dentro del cilindro $x^2+y^2=1$



Para $x^2+y^2=1$ sea $(a\cos t, a\operatorname{sen} t)$

y $z = \frac{2-y}{2} = \frac{2-a\operatorname{sen} t}{2}$

$\Rightarrow \phi(a,t) = \left(a\cos t, a\operatorname{sen} t, \frac{2-a\operatorname{sen} t}{2}\right)$

$t \in [0, 2\pi]$ $a \in [0,1]$

- Parametrización de superficies de la forma $z=f(x,y)$

La parametrización de una superficie que es gráfica de una función escalar $z=f(x,y)$, se obtiene al asignar un parámetro a cada una de las variables x y y, digamos $x=u$, $y=v$, de modo que (u,v) se punto del dominio de la función f $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x \\ y \\ z=f(x,y) \end{cases} \Rightarrow \phi: \begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=f(u,v) \end{cases} \quad ó \quad \phi(u,v) = (u,v,f(u,v))$$

⑤ Parametrizar $z=x+y^2$

$\Rightarrow$ Sea $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\phi(u,v) = (u,v,u+v^2)$

⑥ Parametrizar el plano π que pasa por $(1,0,1)$, $(-2,3,0)$ y $(4,1,-2)$.

Sol.

Sea $\bar{a} = (-2,3,0)-(1,0,1) = (-3,3,-1)$ y

$\bar{b} = (4,1,-2)-(1,0,1) = (3,1,-3)$

los cuales van a definir a π.

02/10/2014

Ahora, hacemos $\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i}(-8)-\hat{j}(12)+\hat{k}(-12)$

$\Rightarrow \bar{a}\times\bar{b} = -4(2,3,3)$ el cual es un vector ortogonal a $\bar{a}$ y $\bar{b}$, tomando sólo $(2,3,3)$ $\Rightarrow$

$\Pi = (2,3,3)\cdot((x,y,z)-(1,0,1)) = 0$

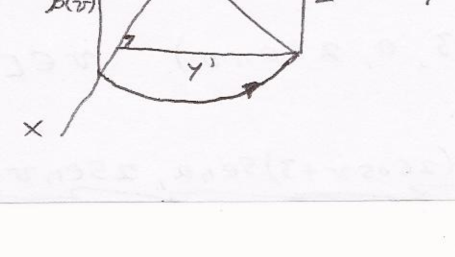
$\Rightarrow 2(x-1)+3y+3(z-1)=0 \quad \Rightarrow 2x+3y+3z-5=0$ es el plano buscado.

$\Rightarrow z = \dfrac{5-2x-3y}{3}$

$\therefore \ \phi(u,v) = \left(u, v, \dfrac{5-2u-3v}{3}\right)$

- Parametrización de una superficie de revolución.

Considérese una trayectoria C en el plano xz, y sea $\sigma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ una parametrización de C dada por $\sigma(v)=(\alpha(v),0,\beta(v))$ con $a\leq v\leq b$. Si a un punto $P=(\alpha(v),0,\beta(v))$ de C se le gira u radianes alrededor del eje z en el sentido positivo, el punto P se transforma en $P'=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$, cuyas coordenadas se obtienen como sigue:

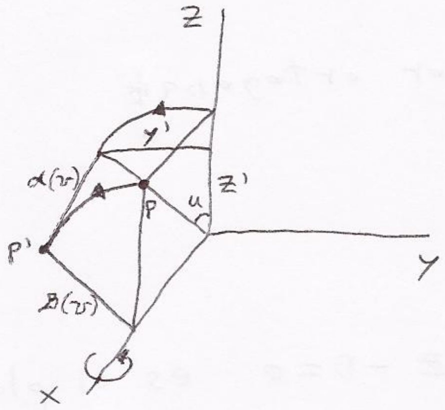


$\cos u = \dfrac{x'}{\alpha(v)}, \quad \operatorname{sen} u = \dfrac{y'}{\alpha(v)}$

$\therefore \ \phi(u,v) = (\alpha(v)\cos u, \alpha(v)\operatorname{sen} u, \beta(v)) \ \ldots (1)$

$v\in[a,b] \quad u\in[0,2\pi]$

Si ese mismo punto lo hacemos girar alrededor del eje x. tenemos:

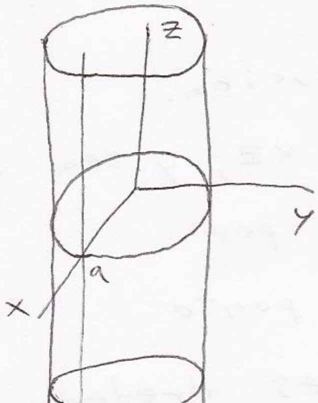


$\cos u = \frac{z'}{B(v)}$, $\operatorname{sen} u = \frac{y'}{B(v)}$

$\therefore \phi(u,v) = (\alpha(v), B(v)\operatorname{sen} u, B(v)\cos u) \dots (2)$

$v \in [a,b] \quad u \in [0, 2\pi]$

(7) Parametrizar la superficie de revolución S que se obtiene al girar alrededor del eje z, la recta $x=a$ contenida en el plano xz.

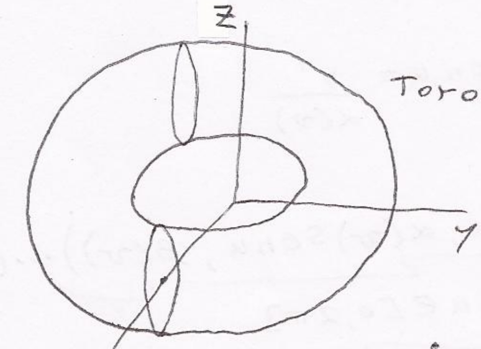


$\sigma(v) = (a, 0, v) = (\alpha(v), 0, B(v)) \quad v \in \mathbb{R}$

$\therefore \phi(u,v) \overset{\text{por (1)}}{=} (a\cos u, a\operatorname{sen} u, v)$

$v \in \mathbb{R} \quad u \in [0, 2\pi]$

(8) Superficie generada al hacer girar $x^2 - 6x + z^2 + 5 = 0$ alrededor del eje z.



$x^2 - 6x + z^2 + 5 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + z^2 - 4 = 0$

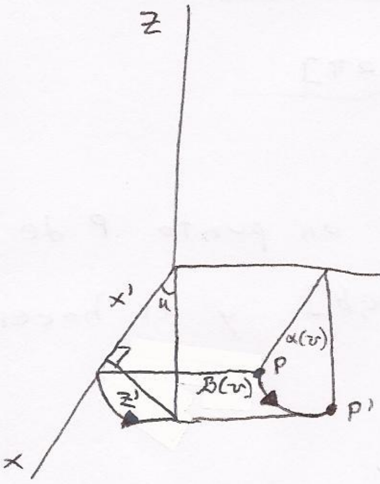
$\Rightarrow (x-3)^2 + z^2 = 4$

$\Rightarrow \sigma(v) = (2\cos v + 3, 0, 2\operatorname{sen} v) \quad v \in [0, 2\pi]$

$\therefore \phi(u,v) \overset{\text{por (1)}}{=} ((2\cos v + 3)\cos u, (2\cos v + 3)\operatorname{sen} u, 2\operatorname{sen} v)$

con $v \in [0, 2\pi]$ $u \in [0, 2\pi]$.

Si consideramos ahora a la trayectoria C en el plano XY $\Rightarrow$ un punto de C estará dado por $P = (\alpha(v), \beta(v), 0)$ con $v \in [a, b]$, y al hacerlo girar en torno al eje Y obtendremos lo siguiente:

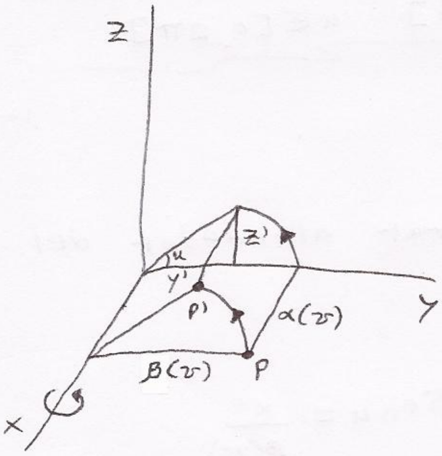


$$\cos u = \frac{x'}{\alpha(v)}, \quad \operatorname{Sen} u = \frac{z'}{\alpha(v)}$$

$$\therefore \phi(u, v) = (\alpha(v)\cos u, \beta(v), \alpha(v)\operatorname{Sen} u) \ldots (3)$$

$$v \in [a, b] \quad u \in [0, 2\pi]$$

y si la misma trayectoria se hace girar alrededor del eje X obtenemos:

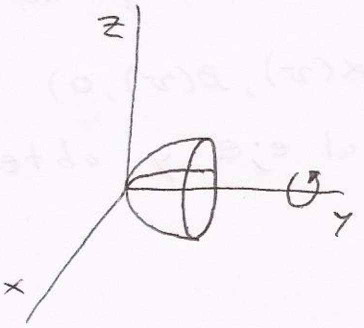


$$\cos u = \frac{y'}{\beta(v)}, \quad \operatorname{Sen} u = \frac{z'}{\beta(v)}$$

$$\therefore \phi(u, v) = (\alpha(v), \beta(v)\cos u, \beta(v)\operatorname{Sen} u) \ldots (4)$$

$$v \in [a, b] \quad u \in [0, 2\pi]$$

⑨ Superficie generada al hacer girar $y=x^2$ alrededor del eje y.



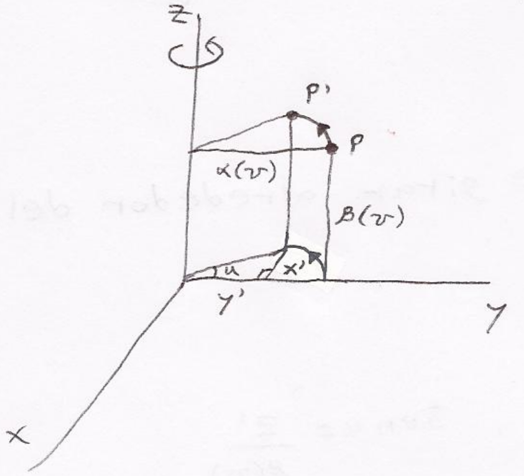
Sea $\sigma(v)=(v,v^2,0)=(\alpha(v),\beta(v),0)$

$v\in\mathbb{R}$

$$\therefore \underbrace{\phi(u,v)}_{\text{por ③}}=(v\cos u,\ v^2,\ v\operatorname{sen} u)$$

$v\in\mathbb{R}\quad u\in[0,2\pi]$

Por último, si C está en el plano zy $\Rightarrow$ un punto P de C está dado por $P=(0,\alpha(v),\beta(v))$ con $v\in[a,b]$, y al hacerlo girar alrededor del eje z obtenemos:

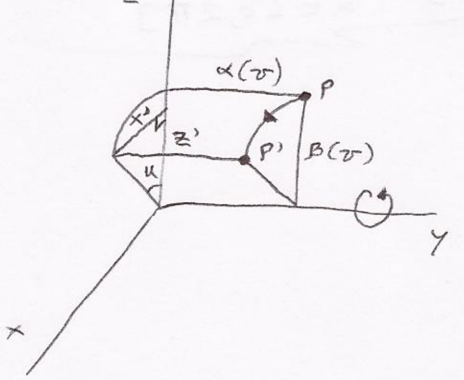


$\cos u=\dfrac{y'}{\alpha(v)}$, $\operatorname{sen} u=\dfrac{x'}{\alpha(v)}$

$$\therefore \phi(u,v)=(\alpha(v)\operatorname{sen} u,\ \alpha(v)\cos u,\ \beta(v))\ \cdots ⑤$$

$v\in[a,b]\quad u\in[0,2\pi]$

y si la misma trayectoria se hace girar alrededor del eje y obtenemos:



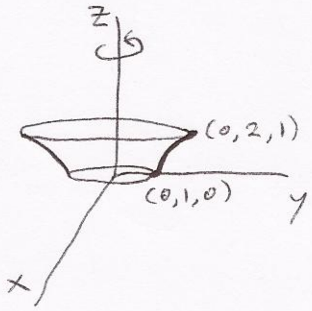
$\cos u=\dfrac{z'}{\beta(v)}$, $\operatorname{sen} u=\dfrac{x'}{\beta(v)}$

$$\therefore \phi(u,v)=(\beta(v)\operatorname{sen} u,\ \alpha(v),\ \beta(v)\cos u)\ \cdots ⑥$$

$v\in[a,b]\quad u\in[0,2\pi]$

02/10/2014

(10) Superficie generada al hacer girar alrededor del eje z la porción de $y = z^2+1$ desde $(0,1,0)$ hasta $(0,2,1)$.



Sea $r(v) = (0, v^2+1, v) = (0, \alpha(v), \beta(v))$

con $v \in [0,1]$

$\therefore \underbrace{\phi(u,v)}_{\text{por } 5} = ((v^2+1)\operatorname{sen} u, (v^2+1)\cos u, v)$

$v \in [0,1] \quad u \in [0, 2\pi]$