07/10/2014

Vector tangente, vector normal, plano tangente y área de superficie

Sea $f(u,v)=(f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$, los vectores tangentes son:

$$T_u(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \quad \text{y} \quad T_v(u,v)=\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$$

y el vector normal es $N(u,v)=T_u(u,v)\times T_v(u,v)$

$\therefore$ el plano tangente es $\Pi = N(u_0,v_0)\cdot((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0))=0$

donde $f(u_0,v_0)=(x_0,y_0,z_0)$.

Ejercicios

Encontrar la ecuación del plano tangente de lo siguiente en el punto indicado.

① $\phi(u,v)=(x(u,v), y(u,v), z(u,v))=(u+2v, u^2, v^2)$ y $P=(3,1,1)$

Para encontrar (u_0,v_0) basta con ver que $u+2v=3$, $u^2=1$ y $v^2=1$

$$\Rightarrow (u_0,v_0)=(1,1)$$

$$\Rightarrow T_u(u,v)=\frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v)=(1,2u,0)$$

$$T_v(u,v)=\frac{\partial \phi}{\partial v}(u,v)=(2,0,2v) \qquad \Rightarrow N(u,v)=(4uv,-2v,-4u)$$

$$=2(2uv,-v,-2u)$$

y $N(1,1)=(2,-1,-2)$ omitiendo el factor común 2.

$$\therefore \Pi=(2,-1,-2)\cdot(x-3,y-1,z-1)=0$$

$$\Rightarrow 2x-6-y+1-2z+2=0$$

$\therefore$ $\underline{2x-y-2z-3=0}$ es la ecuación del plano tangente a ϕ en P.

② S es la gráfica de $2xy+z^2=3$ y $P=(1,1,1)$

Proponemos $\phi(u,v)=(u,v,\sqrt{3-2uv})$ en donde se ve que $(u_0,v_0)=(1,1)$

$\Rightarrow T_u = \left(1, 0, \frac{-v}{\sqrt{3-2uv}}\right) \longrightarrow T_u(1,1) = (1, 0, -1)$

$T_v = \left(0, 1, \frac{-u}{\sqrt{3-2uv}}\right) \longrightarrow T_v(1,1) = (0, 1, -1)$

$\Rightarrow N(1,1) = (1, 1, 1)$

$\therefore \Pi = (1,1,1)\cdot(x-1, y-1, z-1) = 0$

$\therefore$ $x+y+z-3=0$ es la ecuación del plano tangente a ϕ en P.

③ S es la porción del cilindro $x^2+y^2=4$ entre $z=0$ y $z=3$. $P=(0,2,2)$

Proponemos $\phi(u,v) = (u, \sqrt{4-u^2}, v)$ con $(u_0, v_0) = (0,2)$

$\Rightarrow T_u = \left(1, \frac{-u}{\sqrt{4-u^2}}, 0\right) \longrightarrow T_u(0,2) = (1,0,0)$

$T_v = (0, 0, 1) \longrightarrow T_v(0,2) = (0,0,1)$

$\Rightarrow N(0,2) = (0,1,0)$

$\therefore \Pi = (0,1,0)\cdot(x, y-2, z-2) = 0$

$\therefore$ $y-2=0$ es la ecuación del plano tangente a ϕ en P.

④ S es el paraboloide $z = x^2+y^2$ y $P=(1,1,2)$

Proponemos $\phi(u,v) = (u, v, u^2+v^2)$ y se ve que $(u_0,v_0)=(1,1)$

$\Rightarrow T_u = (1, 0, 2u) \longrightarrow T_u(1,1) = (1,0,2)$

$T_v = (0, 1, 2v) \longrightarrow T_v(1,1) = (0,1,2)$

$\Rightarrow N(1,1) = (-2,-2,1) = -(2,2,-1)$

$\Rightarrow \Pi = (2,2,-1)\cdot(x-1, y-1, z-2) = 0$

$\Rightarrow 2x-2+2y-\cancel{2}-z+\cancel{2}=0$

$\therefore$ $2x+2y-z-2=0$ es la ecuación del plano tangente a ϕ en P.

07/10/2014

⑤ Plano tangente al toro $\phi(u,v)=((1+\cos v)\cos u,(1+\cos v)\operatorname{sen} u, \operatorname{sen} v)$ en $P=(1,0,1)$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} (1+\cos v)\cos u = 1 \\ (1+\cos v)\operatorname{sen} u = 0 \\ \operatorname{sen} v = 1 \end{array} \Rightarrow v_0=\frac{\pi}{2} \text{ y } u_0=0$$

$T_u=((1+\cos v)(-\operatorname{sen} u),(1+\cos v)\cos u, 0) \rightarrow T_u(0,\frac{\pi}{2})=(0,1,0)$

$T_v=(-\operatorname{sen} v\cos u, -\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u, \cos v) \rightarrow T_v(0,\frac{\pi}{2})=(-1,0,0)$

$\Rightarrow N(0,\frac{\pi}{2})=(0,0,1)$

$\Rightarrow \Pi=(0,0,1)\cdot(x-1,y,z-1)=0$

$\therefore$ $z-1=0$ es la ecuación del plano tangente a ϕ en P.

Áreas de superficies

$A(S)=\iint_D \|T_u\times T_v\|\,du\,dv$ con D la región de integración.

⑥ Calcular el área de la porción del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ entre $z=0$ y $z=1$

Una posible parametrización es $\phi(u,v)=(u,v,\sqrt{u^2+v^2})$ con $D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leq u\leq 1, -\sqrt{1-u^2}\leq v\leq\sqrt{1-u^2}\}$, pero para hacer el cálculo más simple usemos una parametrización en coordenadas polares, i,e $\phi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, r)$ con $D=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq r\leq 1, 0\leq\theta\leq 2\pi\}$

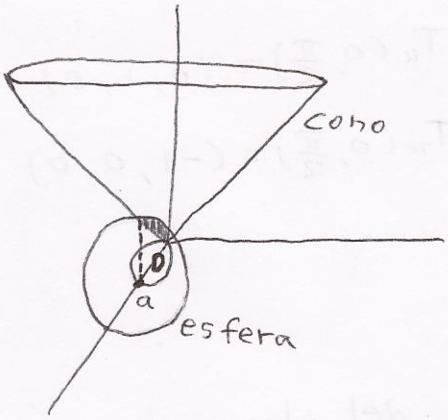
$\Rightarrow T_r=(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,1)$

$T_\theta=(-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 0)$ $\Rightarrow N(r,\theta)=(-r\cos\theta,-r\operatorname{sen}\theta,r)$

$\Rightarrow \|N(r,\theta)\| = \sqrt{2}\, r$

$\Rightarrow A(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{1} \sqrt{2}\, r\, dr\, d\theta = \cancel{2}\pi\sqrt{2}\,\frac{1}{\cancel{2}} = \sqrt{2}\,\pi$

⑦ Calcule el área de la porción de superficie cónica $x^2+y^2=z^2$ situada por encima del plano $z=0$ y limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=2ax$ $a>0$.



Analizando la esfera

$x^2+y^2+z^2-2ax=0$

$\Rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2+z^2=a^2$

$\Rightarrow (x-a)^2+y^2+z^2=a^2$

Esfera con centro en $(a,0,0)$ y radio a.

La región de integración vista desde el plano xy es:

Como $x^2+y^2=z^2$ y $x^2+y^2+z^2=2ax \Rightarrow 2(x^2+y^2)=2ax$

$\Rightarrow x^2-ax+y^2=0 \Rightarrow x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2=\frac{a^2}{4} \Rightarrow (x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$

el cual es un círculo con centro en $(\frac{a}{2},0)$ y radio $\frac{a}{2}$

$\therefore D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le a,\ -\sqrt{\frac{a^2}{4}-(x-\frac{a}{2})^2}\le y\le\sqrt{\frac{a^2}{4}-(x-\frac{a}{2})^2}\}$

Por otro lado, sea $\phi(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$ una parametrización del cono.

$\Rightarrow T_x=(1,0,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$

$T_y=(0,1,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}) \quad \Rightarrow N(x,y)=(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1)$

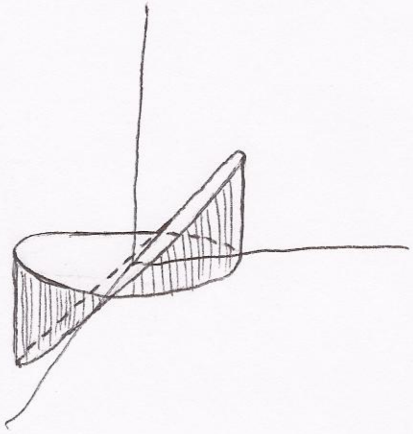
$\Rightarrow \|N(x,y)\|=\sqrt{2}$

haciendo cambio a polares

$\therefore A(S)=\int_0^a\int_{-\sqrt{\frac{a^2}{4}-(x-\frac{a}{2})^2}}^{\sqrt{\frac{a^2}{4}-(x-\frac{a}{2})^2}} \sqrt{2}\,dy\,dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\sqrt{2}\,\frac{a^2}{8} = \sqrt{2}\,\pi\,\frac{a^2}{4}$

07/10/2014

⑧ Dado el recinto limitado por los planos $z=y$, $z=0$ y el cilindro $x^2+y^2=a^2$. Calcule el área de la porción de superficie cilíndrica comprendida entre los 2 planos.



Hay que observar que el área a calcular para $z \geq 0$ es la misma que para $z \leq 0$ $\Rightarrow$ calculemos el área de la mitad superior.

Proponemos:

$\phi(u,v) = (a\cos u, a\,\mathrm{sen}\,u, v)$ donde $u \in [0,\pi]$ y como z va de 0 a y

$\Rightarrow v \in [0, a\,\mathrm{sen}\,u]$

$\Rightarrow T_u = (-a\,\mathrm{sen}\,u, a\cos u, 0)$

$T_v = (0,0,1)$

$\Rightarrow N(u,v) = (a\cos u, a\,\mathrm{sen}\,u, 0)$

$\Rightarrow \|N(u,v)\| = a$

$$\Rightarrow A(S') = \int_0^{\pi}\int_0^{a\,\mathrm{sen}\,u} a\,dv\,du = \int_0^{\pi} a^2\,\mathrm{sen}\,u\,du = -a^2\cos u\Big|_0^{\pi} = 2a^2$$

$\therefore \underline{A(S) = 2A(S') = 4a^2}$