09/10/2014

Áreas de superficies de revolución y reparametrizaciones

Sea γ una trayectoria en el plano yz dada por

$\gamma(t) = (0, y(t), z(t))$ $t \in [a,b]$ y al hacerla girar alrededor del eje z obtenemos una parametrización para la superficie de revolución dada por:

$\phi(t,\theta) = (y(t)\cos\theta, y(t)\operatorname{sen}\theta, z(t))$ con $t \in [a,b]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow T_t = \frac{\partial \phi}{\partial t} = (y'(t)\cos\theta, y'(t)\operatorname{sen}\theta, z'(t))$$

$$T_\theta = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = (-y(t)\operatorname{sen}\theta, y(t)\cos\theta, 0) \quad y$$

$$\Rightarrow N(t,\theta) = (-z'(t)y(t)\cos\theta, -z'(t)y(t)\operatorname{sen}\theta, y'(t)y(t))$$

$$\Rightarrow \|N(t,\theta)\| = \sqrt{z'^2(t)y^2(t)\cos^2\theta + z'^2(t)y^2(t)\operatorname{sen}^2\theta + y'^2(t)y^2(t)}$$

$$= \sqrt{y^2(t)(y'^2(t) + z'^2(t))} = |y(t)|\sqrt{y'^2(t) + z'^2(t)}$$

$$= |y(t)|\,\|\gamma'(t)\|$$

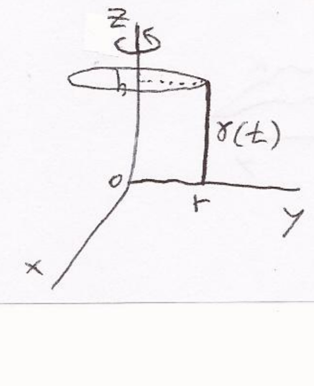
$$\therefore A(S) = \int_0^{2\pi}\int_a^b |y(t)|\,\|\gamma'(t)\|\,dt\,d\theta = 2\pi\int_a^b |y(t)|\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$\therefore \boxed{A(S) = 2\pi\int_a^b |y(t)|\,\|\gamma'(t)\|\,dt}$$

Ejercicios

Calcular el área de la superficie de revolución para lo siguiente:

a) Cilindro S de radio $r>0$ y altura $h>0$.



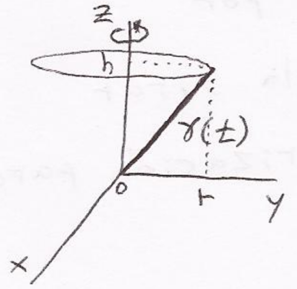
sea $\gamma(t) = (0, r, t)$ $t \in [0, h]$

la parametrización de la recta en el plano yz

$\Rightarrow \gamma'(t) = (0,0,1)$ $\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = 1$ y $|y(t)| = r$

$\Rightarrow A(S) = 2\pi \int_0^h r\,dt = \underline{2\pi r h}$

b) Cono S con altura $h>0$ y radio $r>0$.



Sea $\gamma(t) = (0, rt, ht)$ con $t \in [0,1]$

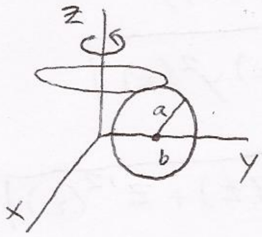
Una parametrización de la recta a la cual se le hará girar alrededor del eje z.

$\Rightarrow \gamma'(t) = (0, r, h) \quad \Rightarrow \|\gamma'(t)\| = \sqrt{r^2+h^2}$

y $|y(t)| = rt$

$\Rightarrow A(S) = 2\pi \int_0^1 rt\sqrt{r^2+h^2}\,dt = \underline{\pi r\sqrt{r^2+h^2}}$

c) Toro obtenido del círculo con centro en $(0,b,0)$ y radio a, $0<a<b$ alrededor del eje z.



Como $0<a<b \Rightarrow b-a>0 \therefore$ todos los puntos de y del círculo son positivos,

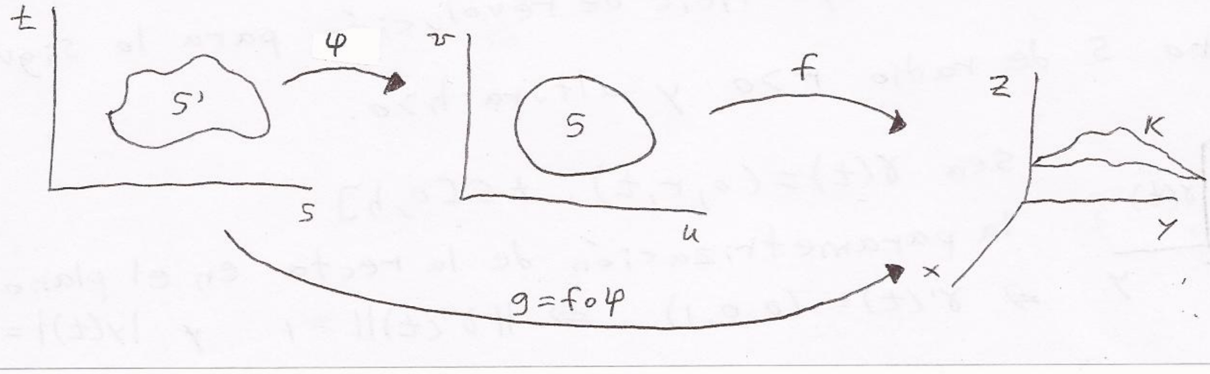
Sea $\gamma(\phi) = (0, b+a\cos\phi, a\operatorname{sen}\phi) \quad \phi \in [0, 2\pi]$

Una parametrización del círculo en el plano yz.

$\Rightarrow \gamma'(\phi) = (0, -a\operatorname{sen}\phi, a\cos\phi) \quad \Rightarrow \|\gamma'(\phi)\| = a \quad$ y $|y(\phi)| = b+a\cos\phi$

$\Rightarrow A(S) = 2\pi \int_0^{2\pi} a(b+a\cos\phi)\,d\phi = 2\pi\,(ab\phi + a^2\operatorname{sen}\phi)\Big|_0^{2\pi} = \underline{4\pi^2 ab}$

Reparametrizaciones



09/10/2014

Para que φ pueda ser usada como parametrización de f es necesario que φ sea biyectiva y $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} \neq 0$, en cuyo caso se podrá realizar $g=f\circ\varphi: S'\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ como se mostró la figura anterior.

Ejercicio

Sea $K=f(S)$ una superficie simple, parametrizada por la función $f: S\to\mathbb{R}^3$, con $S=\{(u,v) \mid u^2+v^2\leq 1\}$. Determine con cuáles de las funciones $\varphi: S'\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ se pueden obtener reparametrizaciones $g=f\circ\varphi: S'\to\mathbb{R}^3$ de K:

a) $\varphi: S'=\{(s,t) \mid s^2+t^2\leq 1\}\to\mathbb{R}^2$, $\varphi(s,t)=(-t,s)$.

Es claro que $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\neq 0$ y que φ es inyectivo, $\therefore$ basta con ver que φ es suprayectivo.

Parametrizando a S' nos da $\sigma(r,\theta)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ con $r\in[0,1]$ y $\theta\in[0,2\pi]$ $\Rightarrow \varphi(\sigma(r,\theta)) = \varphi(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta) = (u,v)$

$\Rightarrow u^2+v^2=r^2$ con $r\in[0,1]$ en donde cláramente se ve que $u^2+v^2\leq 1$ que representa a todos los puntos de S, i,e $\varphi(S')=S$

$\therefore \varphi$ es suprayectiva, $\therefore \varphi$ es biyectiva, $\therefore$ con φ se puede obtener una reparametrización $g=f\circ\varphi$.

b) $\varphi: S'=\{(s,t) \mid s^2+t^2\leq 4\}\to\mathbb{R}^2$, $\varphi(s,t)=(t/2, s/2)$

De manera análoga, $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\neq 0$ y φ es inyectiva.

$\Rightarrow$ Parametrizando a S' tenemos que $\sigma(r,\theta)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ con $r\in[0,2]$ y $\theta\in[0,2\pi]$

$\Rightarrow \varphi(\sigma(r,\theta)) = \varphi(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \left(\frac{r\operatorname{sen}\theta}{2}, \frac{r\cos\theta}{2}\right) = (u,v)$

$\Rightarrow u^2+v^2 = \frac{r^2}{4}$ con $r \in [0,2]$ $\Rightarrow$ es claro ver que representa

$u^2+v^2 \leq 1$ $\therefore \varphi(S') = S$, $\therefore \varphi$ es suprayectiva, $\therefore \varphi$ es biyectiva,

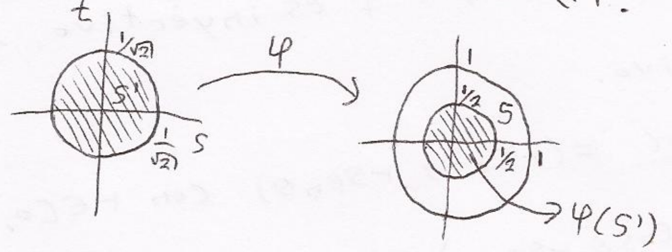
$\therefore$ con φ se puede obtener una reparametrización $g = f \circ \varphi$.

c) $\varphi : S' = \{(s,t) \mid s^2+t^2 \leq \frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(s,t) = (s,t)$

Nuevamente, $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y φ inyectiva. $\Rightarrow$ Sea $\sigma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ $r \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ una parametrización de S' $\Rightarrow \varphi(\sigma(r,\theta)) = \varphi(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = (u,v)$

$\Rightarrow u^2+v^2 = r^2$ con $r \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, donde se ve que representa

$u^2+v^2 \leq \frac{1}{2}$ y no $u^2+v^2 \leq 1$.



i,e $\varphi(S') \neq S$ $\therefore \varphi$ no es suprayectiva.

$\therefore \varphi$ no es biyectiva

$\therefore$ con φ NO se puede obtener una reparametrización $g = f \circ \varphi$.

Ejercicio

Analizar lo mismo que en el ejercicio anterior pero ahora con $S = \{(u,v) \mid a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$

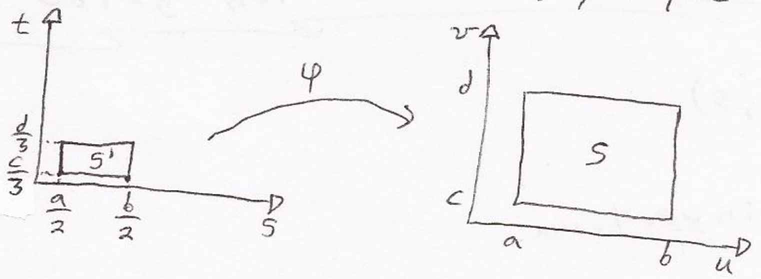
a) $\varphi : S' = \{(s,t) \mid \frac{a}{2} \leq s \leq \frac{b}{2}, \frac{c}{3} \leq t \leq \frac{d}{3}\} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(s,t) = (2s, 3t)$

$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$ y φ inyectiva.

Podemos ver a φ como una transformación lineal de la forma

09/10/2014

$\varphi\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s \\ 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ con $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz asociada a dicha transformación, con el objeto de recordar que una transformación lineal manda líneas rectas en líneas rectas y paralelogramos en paralelogramos, ya que S y S' son rectángulos.

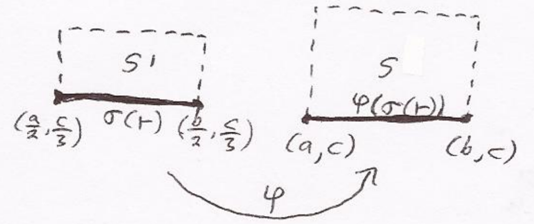


Parametrizando el segmento que une $(\frac{a}{2}, \frac{c}{3})$ con $(\frac{b}{2}, \frac{c}{3})$ tenemos

$\sigma(r) = (r, \frac{c}{3})$ con $r \in [\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$

$\Rightarrow \varphi(\sigma(r)) = \varphi(r, \frac{c}{3}) = (2r, 3(\frac{c}{3})) = (2r, c)$ con $r \in [\frac{a}{2}, \frac{b}{2}]$

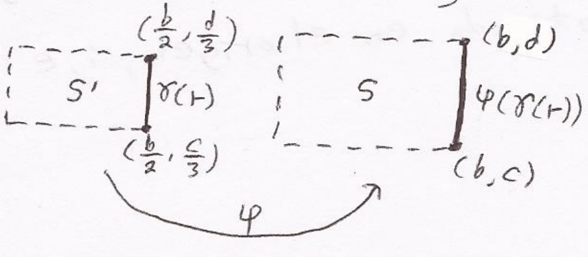
$\Rightarrow$ cuando r va de $\frac{a}{2}$ a $\frac{b}{2}$ $\Rightarrow \varphi(\sigma(r))$ va de (a,c) a (b,c), i,e



Al parametrizar el segmento que une $(\frac{b}{2}, \frac{c}{3})$ con $(\frac{b}{2}, \frac{d}{3})$ tenemos $\gamma(r) = (\frac{b}{2}, r)$ con $r \in [\frac{c}{3}, \frac{d}{3}]$

$\Rightarrow \varphi(\gamma(r)) = \varphi(\frac{b}{2}, r) = (2(\frac{b}{2}), 3r) = (b, 3r)$ con $r \in [\frac{c}{3}, \frac{d}{3}]$

$\Rightarrow$ cuando r va de $\frac{c}{3}$ a $\frac{d}{3}$ $\Rightarrow \varphi(\gamma(r))$ va de (b,c) a (b,d), i,e



y de forma análoga para los restantes lados se llega a $\varphi(S')=S$, $\therefore$ φ es suprayectiva, $\therefore$ φ es biyectiva

$\therefore$ con φ se puede obtener una reparametrización $g=f\circ\varphi$.

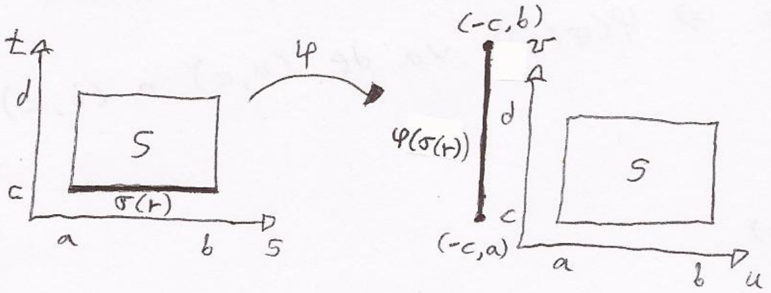
b) $\varphi: S'=S \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(s,t)=(-t,s)$

$$\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$ y φ inyectiva.

Al parametrizar el segmento que une (a,c) con (b,c) tenemos $\sigma(r)=(r,c)$ $r\in[a,b]$

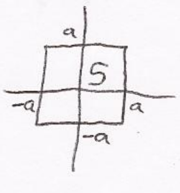
$\Rightarrow \varphi(\sigma(r)) = \varphi(r,c) = (-c,r)$ con $r\in[a,b]$

$\Rightarrow$ cuando r va de a a b, $\varphi(\sigma(r))$ va de $(-c,a)$ a $(-c,b)$, el cual queda fuera de S.



$\therefore$ se puede ver que $\varphi(S'=S)\neq S$, $\therefore$ φ no es suprayectiva, $\therefore$ φ no es biyectiva, $\therefore$ con φ NO se puede obtener una reparametrización $g=f\circ\varphi$.

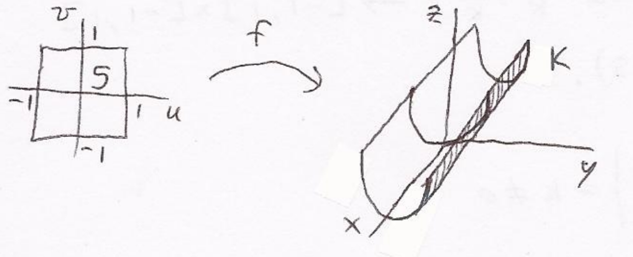
Nota: la única forma en que sí se podría, sería tomar a S como una región cuadrada y centrada en el origen, i,e



09/10/2014

"El área de una superficie es independiente de la parametrización".

Sea $K=f(S)$, $f:[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}^3$, $f(u,v)=(u,v,v^2)$



$z\in[0,1]$
$y\in[-1,1]$
$x\in[-1,1]$

$$T_u=\frac{\partial f}{\partial u}=(1,0,0)$$

$$T_v=\frac{\partial f}{\partial v}=(0,1,2v) \Rightarrow N(u,v)=(0,-2v,1)\Rightarrow \|N(u,v)\|=\sqrt{1+4v^2}$$

$$\Rightarrow A(K)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+4v^2}\,du\,dv=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+4v^2}\,dv \overset{(\#)}{=} \int \sec^2\theta\sqrt{1+\tan\theta}\,d\theta$$

$v=\frac{1}{2}\tan\theta$
$dv=\frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta$

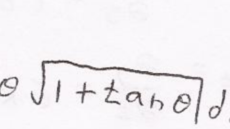
$$=\int\sec^3\theta\,d\theta=\int\sec\theta\sec^2\theta\,d\theta=\sec\theta\tan\theta-\int\sec\theta\tan^2\theta\,d\theta$$

$u=\sec\theta$ $\quad dv=\sec^2\theta\,d\theta$
$du=\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ $\quad v=\tan\theta$

$$=\sec\theta\tan\theta-\int\sec\theta(\sec^2\theta-1)\,d\theta=\sec\theta\tan\theta+\int\sec\theta\,d\theta-\int\sec^3\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow \int\sec^3\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\left(\sec\theta\tan\theta+\ln(\sec\theta+\tan\theta)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2v\sqrt{1+4v^2}+\ln\left(2v+\sqrt{1+4v^2}\right)\right)\Big|_{-1}^{1}$$



$$=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})-\left(-2\sqrt{5}+\ln(-2+\sqrt{5})\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(4\sqrt{5}+\ln\left(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}\right)\right)=2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right)$$

$\therefore \; A(K) = 2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right)$ usando $f(u,v) = (u, v, v^2)$

Si ahora consideramos $\varphi : [-1,1]\times[-\frac{1}{K},\frac{1}{K}] \to [-1,1]\times[-1,1]$ con $K \in \mathbb{R}$ $K \neq 0$, $\varphi(s,t) = (Kt, -s)$.

Observamos que $\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} 0 & K \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = K \neq 0$

$\Rightarrow g = f \circ \varphi : [-1,1]\times[-\frac{1}{K},\frac{1}{K}] \to \mathbb{R}^3$ dado por

$g(s,t) = (f\circ\varphi)(s,t) = f(Kt,-s) = (Kt, -s, s^2)$ es una reparametrización.

$\Rightarrow$ Como $g(s,t) = (Kt, -s, s^2)$

$\Rightarrow T_s = \frac{\partial g}{\partial s} = (0,-1,2s)$

$T_t = \frac{\partial g}{\partial t} = (K, 0, 0)$ $\Rightarrow N(s,t) = (0, 2sK, K)$

y $\|N(s,t)\| = K\sqrt{1+4s^2}$

$$\Rightarrow A(K) = \int_{-1}^{1}\int_{-\frac{1}{K}}^{\frac{1}{K}} K\sqrt{1+4s^2}\,dt\,ds = K\,t\Big|_{-\frac{1}{K}}^{\frac{1}{K}} \int_{-1}^{1}\sqrt{1+4s^2}\,ds$$

$$= \cancel{K}\left(\frac{2}{\cancel{K}}\right)\int_{-1}^{1}\sqrt{1+4s^2}\,ds = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+4s^2}\,ds$$

la cual es la misma integral que $(\#)$

$\therefore \; A(K) = 2\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right)$ usando $g(s,t) = (Kt, -s, s^2)$

$\therefore$ el área de una superficie es independiente de la parametrización que se ocupe.