14/10/2014

Ejercicios

1) Encontrar una parametrización $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con D un rectángulo o un triángulo, de la superficie indicada.

a) El paralelogramo en $\mathbb{R}^3$, cuyos vértices son:
$(-2,0,1), (1,1,0), (3,1,1), (0,0,2)$.

b) El triángulo en $\mathbb{R}^3$, cuyos vértices son:
$(1,1,-1), (2,1,0), (0,1,1)$.

Nota:
Para resolver estos ejercicios procedemos de la siguiente manera:
Sean $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ 3 puntos no colineales $\Rightarrow$
$\bar{d} = \bar{a} - \bar{c}$
$\bar{e} = \bar{b} - \bar{c}$, donde $\bar{d}$ y $\bar{e}$ definen el plano a parametrizar.
$\Rightarrow$ una parametrización del plano es

$$\phi(r,s) = \bar{c} + r\bar{d} + s\bar{e} \quad \text{con} \quad r \in \mathbb{R} \text{ y } s \in \mathbb{R}.$$

a) Sea $(-2,0,1) = \bar{a}$, $(3,1,1) = \bar{b}$ y $(1,1,0) = \bar{c}$

$\Rightarrow \bar{d} = \bar{a} - \bar{c} = (-2,0,1) - (1,1,0) = (-3,-1,1)$ y
$\bar{e} = \bar{b} - \bar{c} = (3,1,1) - (1,1,0) = (2,0,1)$

$\Rightarrow \phi(r,s) = (1,1,0) + r(-3,-1,1) + s(2,0,1)$

$\Rightarrow \phi(r,s) = (1-3r+2s, 1-r, r+s)$

Ahora veamos quién es el dominio de ϕ.

Para $\bar{a}$:
$$\begin{aligned} 1-3r_0+2s_0 &= -2 \\ 1-r_0 &= 0 \\ r_0+s_0 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow (r_0, s_0) = (1,0)$$

Para $\bar{b}$:
$$\begin{aligned} 1-3r_1+2s_1 &= 3 \\ 1-r_1 &= 1 \\ r_1+s_1 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow (r_1, s_1) = (0,1)$$

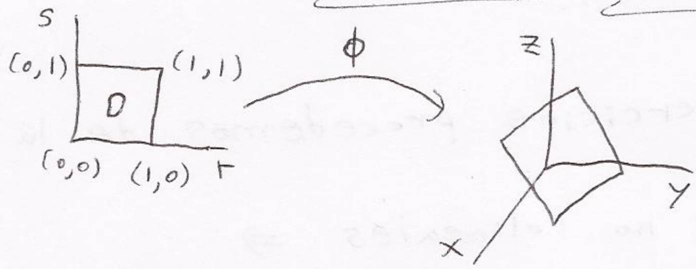
Para $\bar{c}$: $\quad 1-3r_2+2s_2=1$

$$\begin{aligned} 1-r_2 &= 1 \\ r_2+s_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow (r_2,s_2)=(0,0)$$

Para $\bar{h}=(0,0,2)$:

$$\begin{aligned} 1-3r_3+2s_3 &= 0 \\ 1-r_3 &= 0 \\ r_3+s_3 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow (r_3,s_3)=(1,1)$$

$\therefore$ $\phi(r,s)=(1-3r+2s,\ 1-r,\ r+s)$ con $0\leq r\leq 1$, $0\leq s\leq 1$



paralelogramo con vértices en los puntos dados.

b) Sea $(1,1,-1)=\bar{a}$, $(2,1,0)=\bar{b}$ y $(0,1,1)=\bar{c}$

$\Rightarrow \bar{d}=\bar{a}-\bar{c}=(1,1,-1)-(0,1,1)=(1,0,-2)$

$\quad \bar{e}=\bar{b}-\bar{c}=(2,1,0)-(0,1,1)=(2,0,-1)$ y

$\Rightarrow \phi(r,s)=(0,1,1)+r(1,0,-2)+s(2,0,-1)$

$\Rightarrow \phi(r,s)=(r+2s,\ 1,\ 1-2r-s)$

Ahora veamos quién es el dominio de ϕ para que resulte en el triángulo requerido.

Para $\bar{a}$:

$$\begin{aligned} r_0+2s_0 &= 1 \\ 1-2r_0-s_0 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow (r_0,s_0)=(1,0)$$

Para $\bar{b}$:

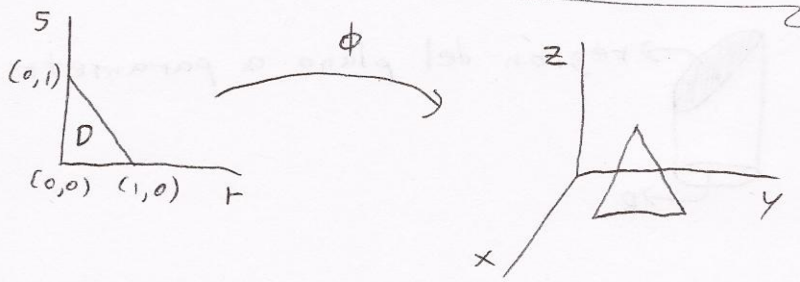
$$\begin{aligned} r_1+2s_1 &= 2 \\ 1-2r_1-s_1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow (r_1,s_1)=(0,1)$$

Para $\bar{c}$:

$$\begin{aligned} r_2+2s_2 &= 0 \\ 1-2r_2-s_2 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow (r_2,s_2)=(0,0)$$

14/10/2014

$\therefore$ $\underline{\phi(r,s) = (r+2s,\ 1,\ 1-2r-s)}$ con $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq s \leq 1-r$



triángulo con vértices en los puntos dados.

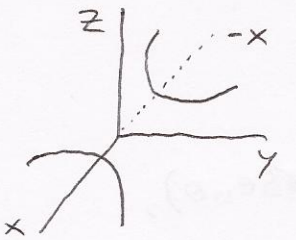
2) Parametrizar el hiperboloide de 2 hojas.

La ec. canónica del hiperboloide de 2 hojas es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-\ell)^2}{c^2} = 1$$

Para parametrizar dicha superficie comenzamos parametrizando $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ como superficie de revolución.

Tomando la hipérbola (trayectoria) en el plano xy, i,e $x^2 - y^2 = 1$



$\Rightarrow$ Sea $\gamma(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, 0)$ $t \in \mathbb{R}$ una parametrización de $x^2 - y^2 = 1$

y al hacerla girar alrededor del eje x obtenemos

$\phi'(t,\theta) = (\cosh t, \operatorname{senh} t \cos\theta, \operatorname{senh} t \operatorname{sen}\theta)$ $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

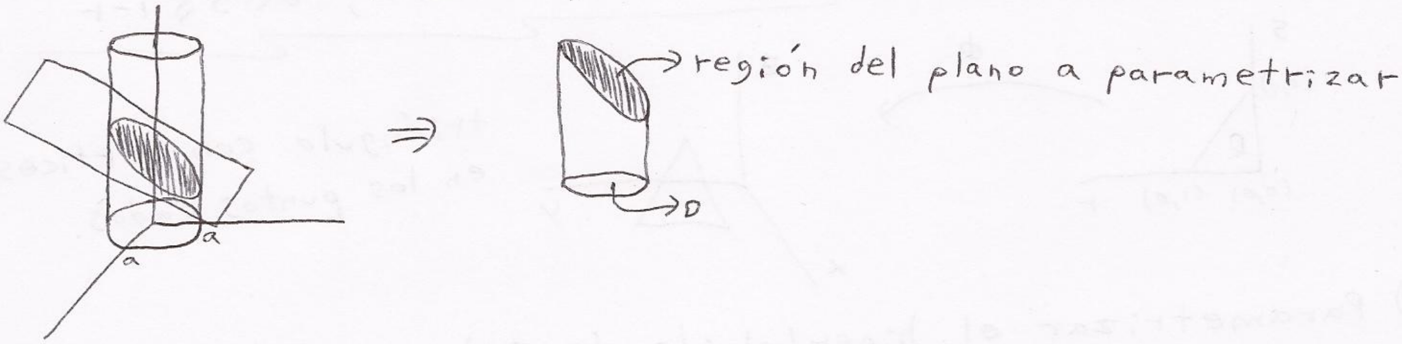
la cual es una parametrización de $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

$\Rightarrow$ sea $\frac{x-h}{a} = \cosh t$, $\frac{y-k}{b} = \operatorname{senh} t \cos\theta$ y $\frac{z-\ell}{c} = \operatorname{senh} t \operatorname{sen}\theta$

$\therefore$ $\underline{\phi(t,\theta) = (h + a\cosh t,\ k + b\operatorname{senh} t\cos\theta,\ \ell + c\operatorname{senh} t\operatorname{sen}\theta)}$ $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

es una parametrización del hiperboloide de hojas

3) Calcular el área de la región que en el plano $x+y+z=a$ determina el cilindro $x^2+y^2=a^2$.



Una parametrización del plano podría ser $\gamma(u,v)=(u,v,a-u-v)$ con (u,v) restringidos a D, pero como D es un disco de radio a $\Rightarrow$ elegimos una parametrización en coordenadas polares por simplicidad.

$\Rightarrow$ Sea $\phi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, a-r(\cos\theta+\text{sen}\,\theta))$ $\quad r\in[0,a]$, $\theta\in[0,2\pi]$

$\Rightarrow T_r=(\cos\theta, \text{sen}\,\theta, -(\cos\theta+\text{sen}\,\theta))$

$T_\theta=(-r\,\text{sen}\,\theta, r\cos\theta, r(\text{sen}\,\theta-\cos\theta))$

$\Rightarrow N(r,\theta)=(r(\text{sen}^2\theta-\cancel{\text{sen}\,\theta\cos\theta}+\cos^2\theta+\cancel{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}),$

$-r(\cancel{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}-\cos^2\theta-\cancel{\text{sen}\,\theta\cos\theta}-\text{sen}^2\theta, r)=(r,r,r)$

$\Rightarrow \|N(r,\theta)\|=\sqrt{3}\,r$

$$\Rightarrow A(S)=\int_0^{2\pi}\int_0^a \sqrt{3}\,r\,dr\,d\theta=\pi a^2\sqrt{3}$$