16/10/2014

## Valor medio de una función definida en una superficie

Sea K una superficie y $\rho: K \to \mathbb{R}$ una función continua definida en K, se define el valor medio de $\rho$ sobre K, por

$$\bar{\rho}_K = \frac{\iint_K \rho \, dA}{\iint_K dA}$$

① Calcular el valor medio de $\rho: \mathbb{R}^3 - \{(0,0,a)\} \to \mathbb{R}$ dada por $\rho(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}$, $a \in (0,1)$, sobre la esfera unitaria.

Sol.

Como la superficie es una esfera $\Rightarrow$ proponemos

$$\phi(u,v) = (\cos u \, \mathrm{Sen}\, v, \mathrm{Sen}\, u \, \mathrm{Sen}\, v, \cos v) \qquad u \in [0,2\pi], \; v \in [0,\pi]$$

$$\Rightarrow T_u = (-\mathrm{Sen}\, u \, \mathrm{Sen}\, v, \cos u \, \mathrm{Sen}\, v, 0)$$

$$T_v = (\cos u \cos v, \mathrm{Sen}\, u \cos v, -\mathrm{Sen}\, v)$$

$$\Rightarrow N(u,v) = (-\cos u \, \mathrm{Sen}^2 v, -\mathrm{Sen}\, u \, \mathrm{Sen}^2 v, -\mathrm{Sen}\, v \cos v)$$

$$\Rightarrow \|N(u,v)\| = \sqrt{\mathrm{Sen}^4 v + \mathrm{Sen}^2 v \cos^2 v} = \mathrm{Sen}\, v$$

$$\therefore \iint_K dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Sen}\, v \, dv\, du = 2\pi\left(-\cos v \Big|_0^{\pi}\right) = 4\pi$$

Por otro lado

$$\rho(\phi(u,v)) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Sen}^2 v + (\cos v - a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2-2a\cos v}}$$

$$\therefore \iint_K \rho \, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{Sen}\, v}{\sqrt{1+a^2-2a\cos v}} \, dv\, du = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}a}\int_0^{\pi} w^{-1/2}\, dw = \frac{2\pi}{a}\sqrt{1+a^2-2a\cos v}\Big|_0^{\pi}$$

$$w = 1+a^2-2a\cos v$$

$$dw = 2a\,\mathrm{Sen}\, v\, dv$$

$$= \frac{2\pi}{a}\left((1+a)-(1-a)\right) = 4\pi$$

$$\therefore \bar{\rho}_K = \frac{4\pi}{4\pi} = 1$$

## Centro de masa y centroide

Sea $K = f(S)$ una superficie y sea $\rho : K \to \mathbb{R}$ una función que da la densidad de la superficie $K$, i,e, $\rho(x,y,z) =$ densidad de $K$ (digamos en $gr/cm^2$) en el punto $(x,y,z) \in K \Rightarrow$ el cm de $K$ se localiza en $(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})$, donde

$$x_{cm} = \frac{\iint_K \rho x \, dA}{\iint_K \rho \, dA}, \quad y_{cm} = \frac{\iint_K \rho y \, dA}{\iint_K \rho \, dA}, \quad z_{cm} = \frac{\iint_K \rho z \, dA}{\iint_K \rho \, dA}$$

con $\iint_K \rho \, dA$ como la masa total de la superficie.

Si la densidad de $K$ es homogenea, i,e $\rho = c$ con $c = cte$.

$\Rightarrow$ el cm coincide con el centroide dado por:

$$\bar{x} = \frac{\iint_K x \, dA}{\iint_K dA}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_K y \, dA}{\iint_K dA}, \quad \bar{z} = \frac{\iint_K z \, dA}{\iint_K dA}$$

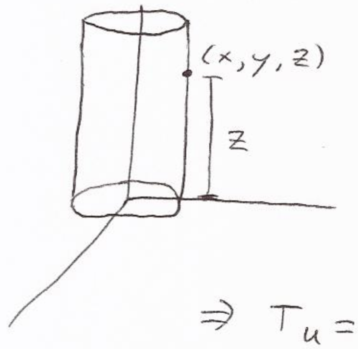
② Calcule la masa total y el cm de una superficie en forma de cilindro circular recto de radio $R$ y altura $H$ (sin tapas), si la densidad en cada punto de él es (numéricamente) igual a la distancia del punto a la base del cilindro.

Sol.

Es claro ver que $\rho(x,y,z) = z$, ya que dado un punto $(x,y,z)$

16/10/2014

del cilindro, la distancia de dicho punto a la base del cilindro queda determinada por $z$.




Proponemos $\phi(u,v)=(R\cos u, R\,\text{Sen}\,u, v)$ $u\in[0,2\pi]$, $v\in[0,H]$ como la parametrización del cilindro.

$$\Rightarrow T_u=(-R\,\text{Sen}\,u, R\cos u, 0)$$
$$T_v=(\;0\;,\;0\;,\;1)$$

$$\Rightarrow N(u,v)=(R\cos u, R\,\text{Sen}\,u, 0) \Rightarrow \|N(u,v)\|=R$$

y $\rho(\phi(u,v))=v$

$$\Rightarrow \text{Masa total}=\iint_K \rho\, dA=\int_0^{2\pi}\int_0^H vR\,dv\,du=\pi R H^2$$

$$y \iint_K \rho z\, dA=\int_0^{2\pi}\int_0^H v^2R\,dv\,du=\frac{2\pi R H^3}{3}$$

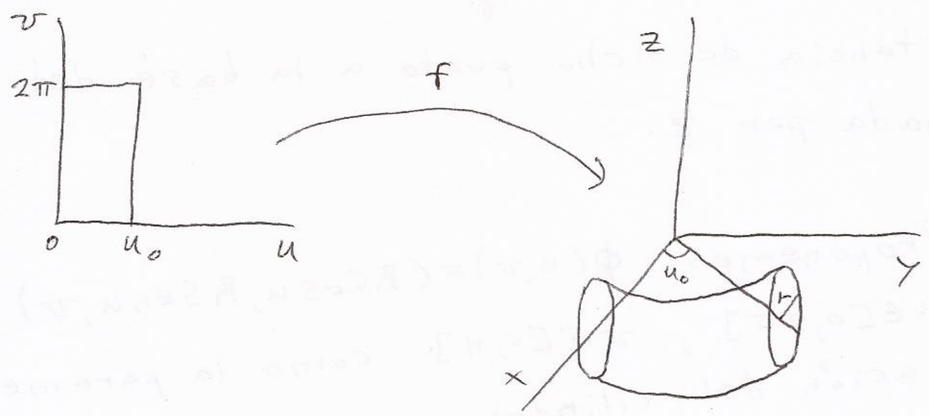
$$\therefore z_{cm}=\frac{\frac{2}{3}\cancel{\pi}\cancel{R}H^{\cancel{3}}}{\cancel{\pi}\cancel{R}\cancel{H^2}}=\frac{2}{3}H$$

Por otro lado, para $x_{cm}$ y $y_{cm}$ es claro que son iguales a cero, esto debido a la simetría del cilindro y al hecho de que $\rho(x,y,z)=\rho(-x,y,z)=z$ y $\rho(x,y,z)=\rho(x,-y,z)=z$.

$$\therefore (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm})=(0,0,\tfrac{2}{3}H)$$

③ Calcular el centroide de la "porción de toro" $K=f(S)$ parametrizada por $f:[0,u_0]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$,

$$f(u,v)=((R+r\cos v)\cos u, (R+r\cos v)\,\text{Sen}\,u, r\,\text{Sen}\,v)$$




$$\Rightarrow T_u = (-(R+r\cos v)\operatorname{Sen} u,\ (R+r\cos v)\cos u,\ 0)$$
$$T_v = (-r\operatorname{Sen} v\cos u,\ -r\operatorname{Sen} v\operatorname{Sen} u,\ r\cos v)$$

$$\Rightarrow N(u,v) = (r(R+r\cos v)\cos u\cos v,\ r(R+r\cos v)\operatorname{Sen} u\cos v,\ r(R+r\cos v)\operatorname{Sen} v)$$

$$\Rightarrow \|N(u,v)\| = \sqrt{r^2(R+r\cos v)^2\cos^2 v + r^2(R+r\cos v)^2\operatorname{Sen}^2 v}$$
$$= r(R+r\cos v)$$

$$\Rightarrow \iint_K dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{u_0} r(R+r\cos v)\,du\,dv = r u_0\int_0^{2\pi}(R+r\cos v)\,dv$$
$$= 2\pi r R u_0$$

$$y\ \iint_K x\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{u_0} r(R+r\cos v)^2\cos u\,du\,dv = r\operatorname{Sen} u_0\int_0^{2\pi}(R+r\cos v)^2\,dv$$
$$= r\operatorname{Sen} u_0\int_0^{2\pi}(R^2+2rR\cos v+r^2\cos^2 v)\,dv \quad \ldots ①$$

Al integrar al $\cos v$ resulta en $\operatorname{Sen} v$ y evaluado, es cero.
$\cos^2 v = \dfrac{1+\cos(2v)}{2}$ y nuevamente al integrar $\cos(2v)$ resulta en $\operatorname{Sen}(2v)$ (salvo constantes) y evaluado, también es cero.

$$\Rightarrow ① = r\operatorname{Sen} u_0\int_0^{2\pi}\left(R^2+\frac{r^2}{2}\right)dv = r\operatorname{Sen} u_0\left(R^2 v+\frac{r^2}{2}v\right)\Big|_0^{2\pi}$$

16/10/2014

$$= r\,\mathrm{Sen}\,u_0\,(2\pi R^2 + \pi r^2) = r\pi\,\mathrm{Sen}\,u_0\,(2R^2 + r^2)$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\cancel{r}\cancel{\pi}\,\mathrm{Sen}\,u_0\,(2R^2+r^2)}{2\cancel{\pi}\cancel{r}R u_0} = \frac{(2R^2+r^2)}{2Ru_0}\,\mathrm{Sen}\,u_0$$

Ahora, para $y$ tenemos:

$$\iint_K y\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{u_0} r(R+r\cos v)^2\,\mathrm{sen}\,u\,du\,dv = r(1-\cos u_0)\int_0^{2\pi}(R+r\cos v)^2\,dv$$

$$= r(1-\cos u_0)(2\pi R^2 + \pi r^2) = r\pi(1-\cos u_0)(2R^2+r^2)$$

$$\therefore\ \bar{y} = \frac{\cancel{r}\cancel{\pi}(1-\cos u_0)(2R^2+r^2)}{2\cancel{\pi}\cancel{r}Ru_0} = \frac{(2R^2+r^2)}{2Ru_0}(1-\cos u_0)$$

Para finalizar, resulta claro que $\bar{z}=0$, pues la porción de toro que está por encima de $z=0$, es la misma que está por debajo.

$$\therefore\ (\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \frac{(2R^2+r^2)}{2Ru_0}(\mathrm{Sen}\,u_0,\ 1-\cos u_0,\ 0)$$

(4) Sea $S$ un paralelogramo de lados no paralelos a ningún eje coordenado. Sean $S_1, S_2, S_3$ las áreas de las proyecciones de $S$ sobre los planos coordenados. Demostrar que el área de $S$ es:

$$\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}$$

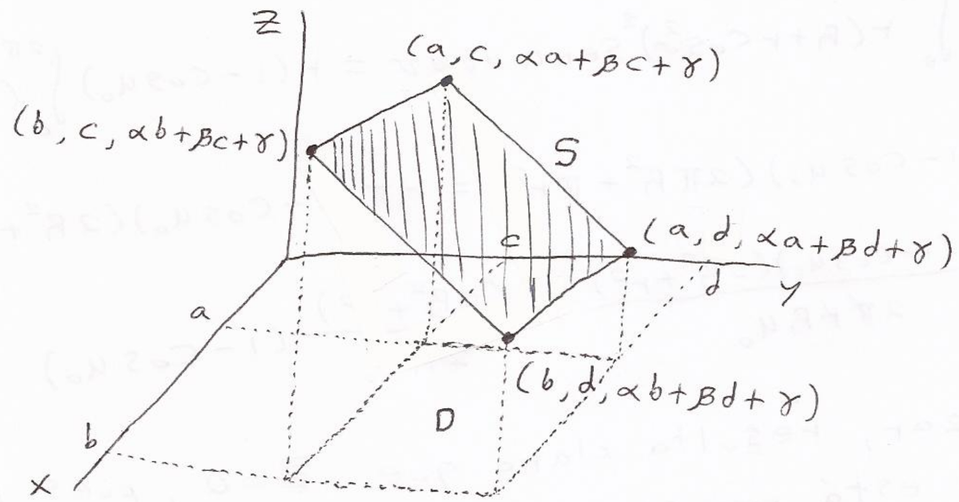
Dem.

Sea $S=f(D)$ una superficie parametrizada por $f: D=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}^3$, $f(u,v)=(u,v,\alpha u+\beta v+\gamma)$, con $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\Rightarrow$

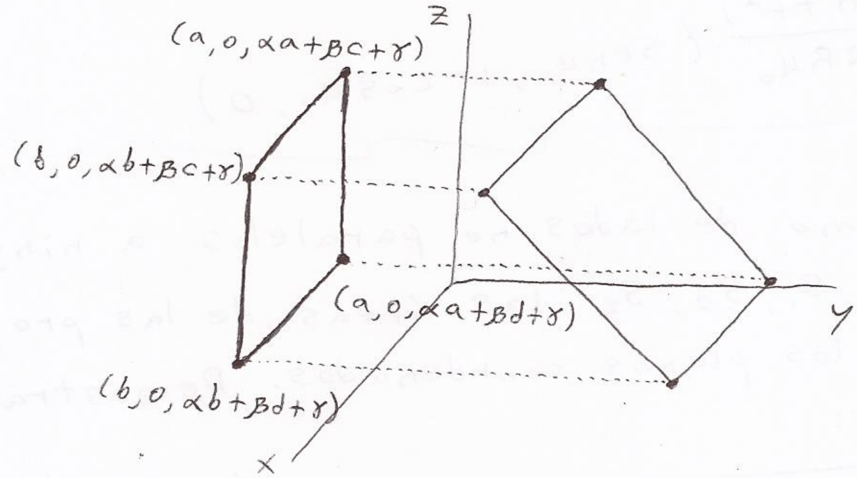
$T_u = (1, 0, \alpha)$
$T_v = (0, 1, \beta)$ $\Rightarrow$ $N(u,v) = (-\alpha, -\beta, 1)$ y $\|N(u,v)\| = \sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}$

$$\therefore\ A(S) = \int_a^b \int_c^d \sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}\, dv\, du = \sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}\,(b-a)(d-c) \quad \dots\ 1)$$

Ahora bien, tenemos lo siguiente.



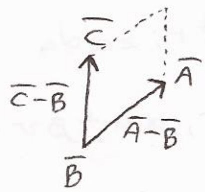

Tomando la proyección en el plano xz $\Rightarrow$




$\bar{A} = (a, 0, \alpha a+\beta d+\gamma)$
$\bar{B} = (b, 0, \alpha b+\beta d+\gamma)$
$\bar{C} = (b, 0, \alpha b+\beta c+\gamma)$
$\bar{D} = (a, 0, \alpha a+\beta c+\gamma)$

Tomando $\bar{A}-\bar{B} = -(\bar{B}-\bar{A}) = (-(b-a), 0, -\alpha(b-a))$
$\bar{C}-\bar{B} = -(\bar{B}-\bar{C}) = (0, 0, -\beta(d-c))$ y

donde

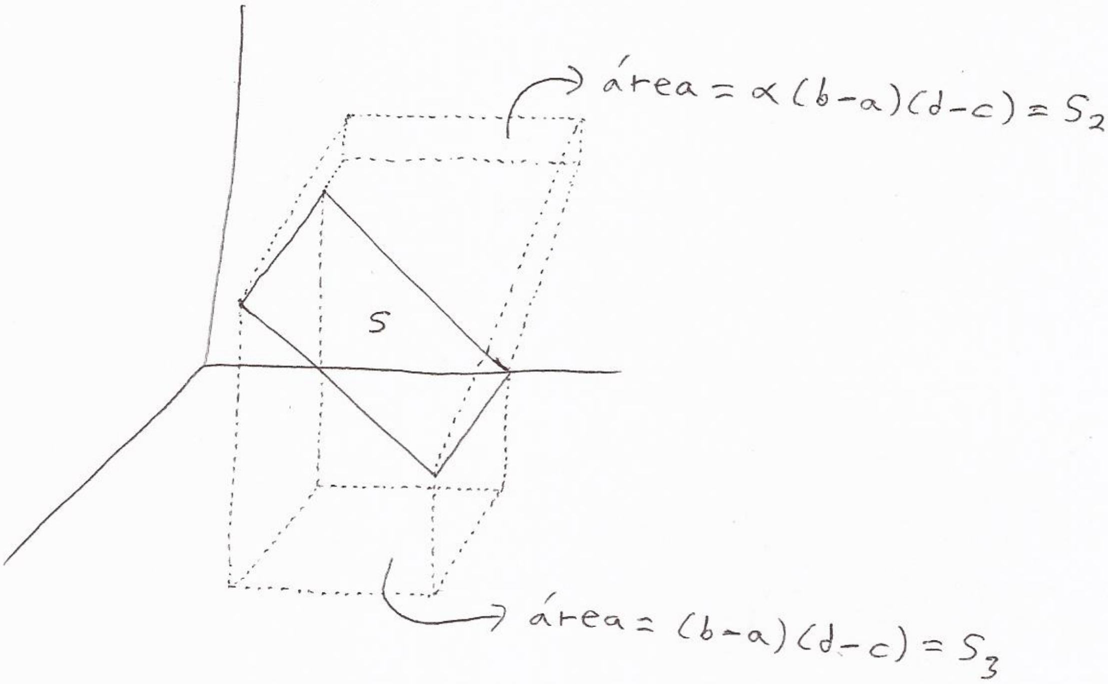



$\Rightarrow (\bar{A}-\bar{B})\times(\bar{C}-\bar{B}) = (0, -\beta(b-a)(d-c), 0)$

16/10/2014

$\therefore \; \|(\bar{A}-\bar{B})\times(\bar{C}-\bar{B})\| = \beta(b-a)(d-c) = S_1$ que es el área de la proyección del paralelogramo sobre el plano $xz$.

De manera análoga:




$$\Rightarrow \sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2} = \sqrt{((b-a)(d-c))^2(1+\alpha^2+\beta^2)}$$
$$= (b-a)(d-c)\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}$$

y comparando esto último con 1) se verifica que

$$\underline{A(S) = \sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}}$$